

# **Modellus 2.01**

# Manual

Vitor Duarte Teodoro

<http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus>  
modellus@mail.fct.unl.pt

Junho de 2000

Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade Nova de Lisboa, Portugal

*Modellus 2.01*

Autores: Vitor Duarte Teodoro, João Paulo Duque Vieira, Filipe Costa  
Clérigo

Copyright 2000

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

---

## O que é novo na versão 2.01

1. Utilização de vídeo (formato AVI) na janela de “Animação”.
2. Ferramentas para análise de vídeo, fotografias e gráficos na janela de “Animação”: medida de coordenadas, medida de distâncias, distâncias sobre “curvas”, áreas, declives e ângulos. Possibilidade de utilização de escalas nas diversas medidas, com excepção da medida de ângulos, que pode ser feita em graus ou em radianos.
3. Janela “Notas”: um pequeno “processador de texto” para escrever observações, registos, actividades, etc.
4. Opção “Preferências” no menu “Ficheiro” para indicação dos directórios onde se encontram os modelos e as imagens utilizadas nos modelos.
5. Novas funções na janela “Modelo”, incluindo funções de pausa e “stop”.
6. Aumento do número de linhas do modelo: de 64 para 200.
7. Acção em todas as janelas das opções “Casas decimais” e “Limiar Exponencial”.
8. Possibilidade de abertura de ficheiros em modo de execução automática.
9. Opção “Preferências...” no menu Ficheiro para indicação da directoria em que se encontram os modelos e das directorias com imagens e videos.
10. Visualização de tangentes nos gráficos, na janela “Gráfico”, em modo “Repetir” (“Replay”).
11. Opção de visualização/não visualização de pontos no “Objecto Geométrico” na janela de “Animação”.
12. Melhoria do contraste das janelas, com utilização de fundos brancos.
13. Os modelos gravados com “password” não podem ser gravados novamente, sem primeiro serem desprotegidos com a respectiva “password”.
14. Help file completo (em inglês), com quatro tutoriais.
15. Correção de diversos “bugs” e incorrecções.

# A 1

## Janela “Modelo”: novas funcionalidades

### Novos botões

Uma vez executado o programa, a janela “Modelo” tem agora dois novos botões, a seguir ao botão “delta x”:



Esses botões têm as seguintes funcionalidades:

Botão	Ação	Exemplo
	Introduz um valor não definido. <i>Shortcut:</i> ~	$\text{if}(t < 5) \text{ then } (x = \sim)$  $\text{if}(t \geq 5) \text{ then } (x = 10 \times t)$  O valor de $x$ não está definido para valores de $t$ inferiores a 5. Útil em funções definidas por ramos, em que parte do domínio não está definido.
	Designa o último valor de uma variável. <i>Shortcut:</i> ‘	$x = \text{last}x + 1$  O novo valor de $x$ é igual ao valor anterior mais 1. Útil na investigação de iterações/equações com diferenças finitas.

### Novas funções

Além das funções já incluídas na versão 1, o *Modellus* possui agora mais as seguintes novas funções:

Função	Exemplo
Parte inteira	$\text{int}(t)$
Factorial	$\text{fact}(n)$
Secante	$\text{sec}(t)$
Co-secante	$\text{cosec}(t)$
Co-tangente	$\text{cotan}(t)$
Seno hiperbólico $\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$	$\text{sinh}(t)$

Função	Exemplo
Co-seno hiperbólico $\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)$	<b>cosh</b> ( <i>t</i> )
Tangente hiperbólica $\left(\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\right)$	<b>tanh</b> ( <i>t</i> )
Arredondamento	<b>round</b> ( <i>t</i> ) Arredonda para o inteiro mais próximo.
Sinal	<b>sign</b> ( <i>t</i> ) Se o argumento é negativo, <b>sign</b> ( <i>t</i> ) = -1 ; se o argumento é positivo, <b>sign</b> ( <i>t</i> ) = 1; se o argumento é nulo, <b>sign</b> ( <i>t</i> ) = 0.

Foram ainda introduzidas três outras que devem ser utilizadas em conjunto com a condição **if ... then ...** e que permitem parar ou suspender a execução do modelo:

Função	Exemplo
<b>stop</b> ( ) Paragem	<b>if</b> ( <i>y</i> <0) <b>then</b> ( <i>a</i> = <b>stop</b> ( <i>t</i> )) Pára a execução do modelo quando <i>y</i> <0 e o valor de <i>t</i> é atribuído a <i>a</i> .
<b>pause</b> ( ) Pausa	<b>if</b> ( <i>t</i> ==5) <b>then</b> ( <i>a</i> = <b>pause</b> ( <i>t</i> )) Suspende a execução do modelo quando <i>t</i> é igual a 5 e atribui o valor de <i>t</i> à variável <i>a</i> . Pode continuar-se a execução do modelo, pressionando o botão  , na janela de Controlo.
<b>pause2</b> ( ) Pausa temporária	<b>if</b> ( <i>t</i> ==5) <b>then</b> ( <i>a</i> = <b>pause2</b> (10)) Suspende a execução do modelo quando <i>t</i> é igual a 5 e atribui o valor 10 à variável <i>a</i> , mantendo-se em pausa por 10 unidades de tempo (10 décimos de segundo, aproximadamente).

Nota: as funções reconhecidas na versão 1 eram as seguintes:

Função	Exemplo
Raíz quadrada (pode também ser obtida utilizando o botão  na janela “Modelo”)	<b>sqrt</b> (2)
Seno	<b>sin</b> (2* $\pi$ * <i>f</i> * <i>t</i> ) ou <b>sen</b> (2* $\pi$ * <i>f</i> * <i>t</i> )
Co-seno	<b>cos</b> (2* $\pi$ * <i>f</i> * <i>t</i> )
Tangente	<b>tan</b> (5)
Secante	<b>sec</b> (2)
Arco seno	<b>arcsin</b> (0.5) ou <b>asin</b> (0.5) ou <b>arcsen</b> (0.5) ou <b>asen</b> (0.5)
Arco co-seno	<b>arccos</b> (0.5) ou <b>acos</b> (0.5)
Arco tangente	<b>arctan</b> (0.5) ou <b>atan</b> (0.5)
Logaritmo natural	<b>ln</b> (5)
Logaritmo decimal	<b>log</b> (10)

---

<b>Função</b>	<b>Exemplo</b>
Gerador de números aleatórios	<b>rnd(10)</b> Nota: gera números aleatórios entre 0 e 10.
Gerador de números aleatórios inteiros	<b>irnd(10)</b> Nota: gera números aleatórios inteiros entre 0 e 10.
Valor absoluto	<b>abs(-5)</b>

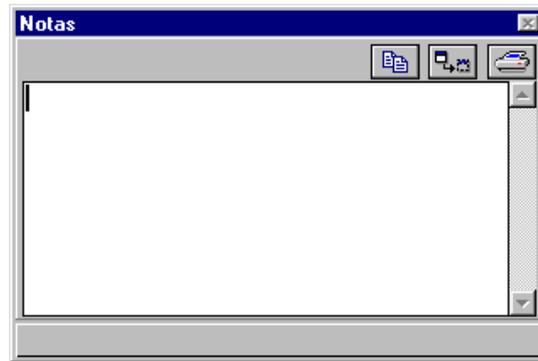
---

# A 2

## Janela “Notas”

### “Notas”

A janela “Notas” destina-se a escrever observações, registos, comentários, propostas de actividade:



Nesta janela é possível utilizar os “shortcuts” standard do “Windows”:

- Ctrl + C para copiar o texto seleccionado.
- Ctrl + V para colar.
- Ctrl + X para cortar o texto seleccionado.
- Ctrl + Z para anular.

### Transferência de texto entre aplicações

O texto da janela “Notas” pode ser copiado para um processador de texto ou pode ser colado, vindo de outra aplicação.

### Uso de password e efeito na janela “Notas”

Se o modelo for gravado com “password” e com a janela “Notas” visível, o texto não pode ser alterado, podendo, no entanto, ser copiado para outras aplicações.

O botão “Copiar” nesta janela apenas actua sobre texto previamente seleccionado, não sobre todo o conteúdo da janela “Notas”.

### Esconder a janela

O botão “Esconder”, , permite, tal como no caso das outras janelas, esconder a janela “Notas” — sem perder o conteúdo da janela. Este botão é, de certo modo, equivalente ao botão minimizar das janelas “Windows”. Se a janela estiver escondida e o ficheiro não tiver sido gravado com password, pode novamente ser visualizada utilizando o menu “Janela”, opção “Notas”.

### Limite de caracteres

O número máximo de caracteres na janela “Notas” é de aproximadamente 3200 —cerca de duas páginas de texto.

---

# A3

## Menu “Ficheiro”

O menu “Ficheiro” inclui uma nova opção, “Preferências”:



Nesta opção pode indicar-se a pasta (“Folder”) que é aberta por omissão (“Default folder”) sempre que se abre ou guarda um modelo:



Pode também indicar-se as pastas onde se encontram as imagens ou vídeos. Se estas estiveram indicadas, o Modellus encontrará mais facilmente qualquer ficheiro GIF, BMP ou AVI.

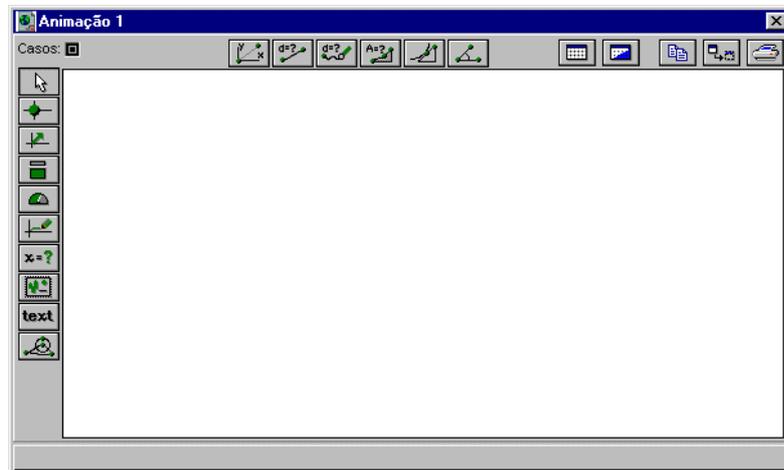
Quando instalado a partir do ficheiro de instalação, o Modellus regista no ficheiro “win.ini” da pasta de sistema (Windows) os dados referentes às pastas pré-definidas.

# A4

## Janela “Animação”

### Novas funcionalidades

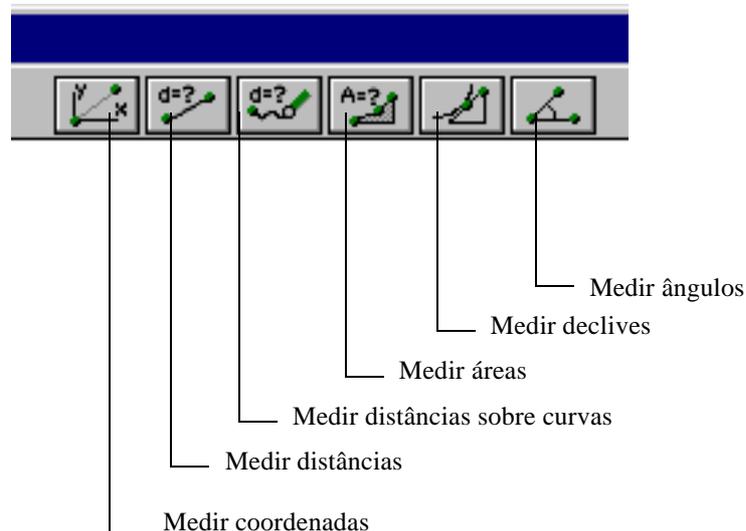
A janela “Animação”, uma vez criada (é possível, tal como na versão anterior, criar três janelas “Animação”) tem o seguinte aspecto:



Inclui 6 novos botões no topo, destinados a fazer medições, com o modelo parado, suspenso ou em execução.

### Ferramentas de medida

São as seguintes as funcionalidades dos novos botões:



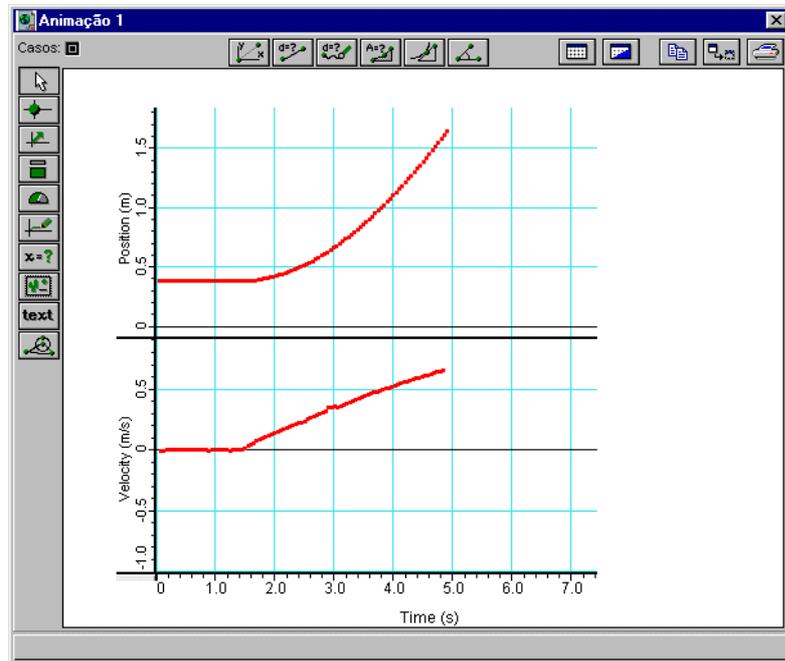
Uma vez activado o botão na janela de “Animação”, clicando com o botão **esquerdo** do rato *inicia* a medição. O botão **direito** *termina* a medição.

## Medir coordenadas

Um exemplo de medida de coordenadas num gráfico:

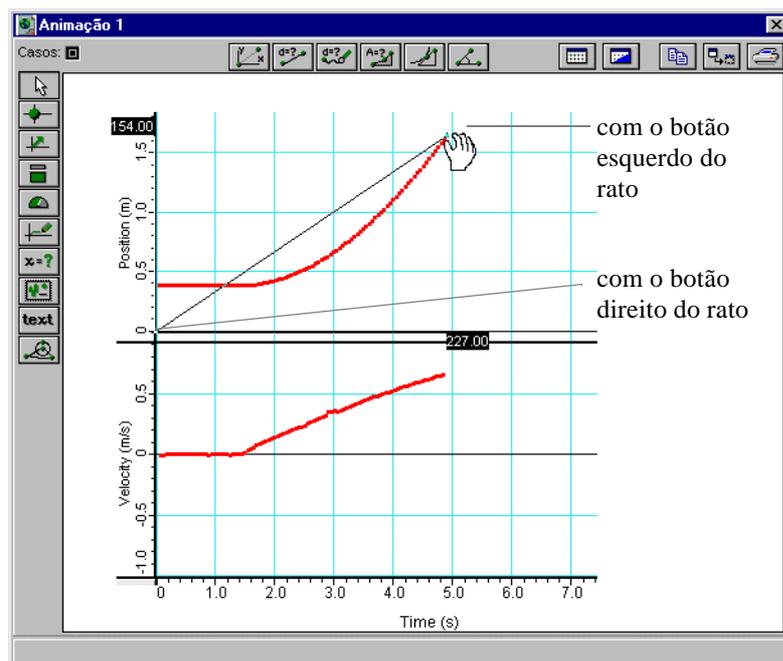


1. Utilizando o botão “Definição de fundo”, , colocou-se uma imagem de um gráfico no fundo da janela (as imagens devem estar em formato GIF ou BMP):

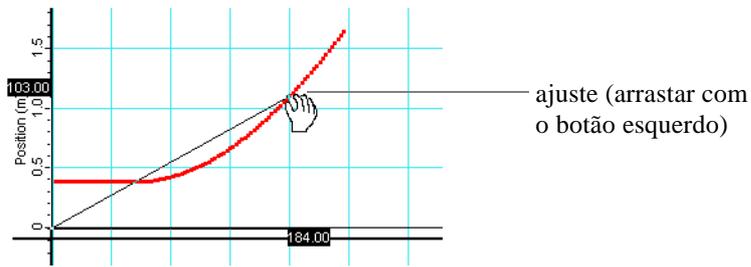


Esta imagem está sempre por detrás de todos os objectos colocados nesta janela (o que não acontece quando se coloca uma imagem utilizando o botão de importação de imagens colocado nas ferramentas do lado esquerdo, ).

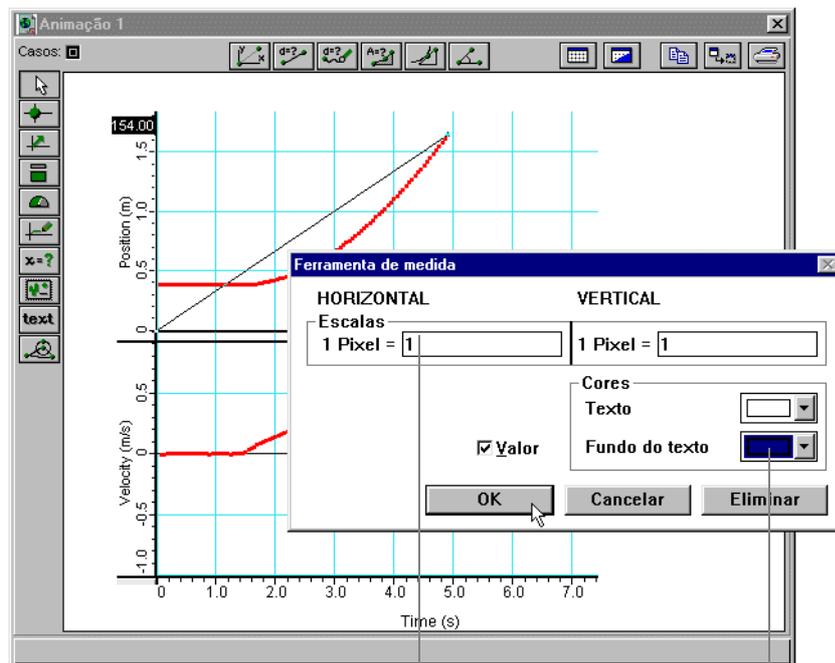
Para medir coordenadas, clicar com o **botão esquerdo** no ponto que se toma como **origem** do sistema de coordenadas e com o **botão direito** no ponto em que se quer medir as coordenadas:



Se necessário, pode *ajustar-se* a posição de qualquer dos pontos do medidor de coordenadas, utilizando o **botão esquerdo** do rato:



Pode igualmente *editar-se a escala* do medidor e as cores dos valores de medida, clicando com o **botão direito** sobre a **origem** ou a **extremidade** do medidor de coordenadas:



definição de escala

definição de cor de texto e de cor de fundo da medida

Procede-se de modo idêntico para eliminar a medida.

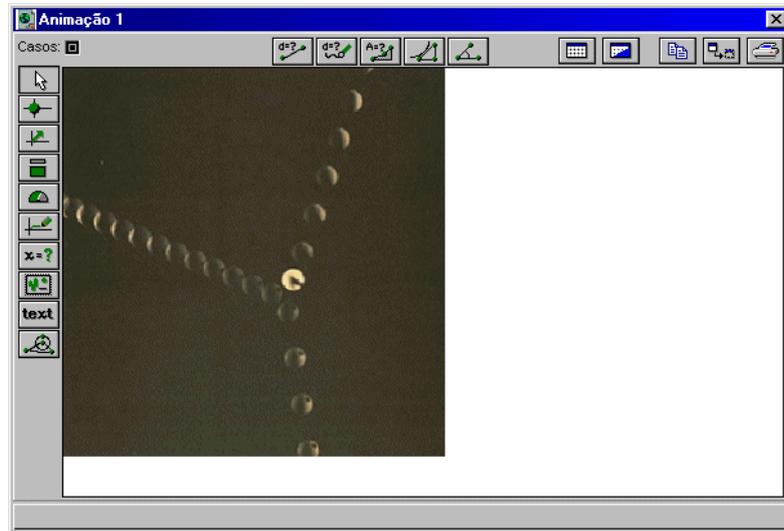
Estas funcionalidades de edição do medidor de coordenadas são comuns às restantes ferramentas de medida.

## Medir distâncias

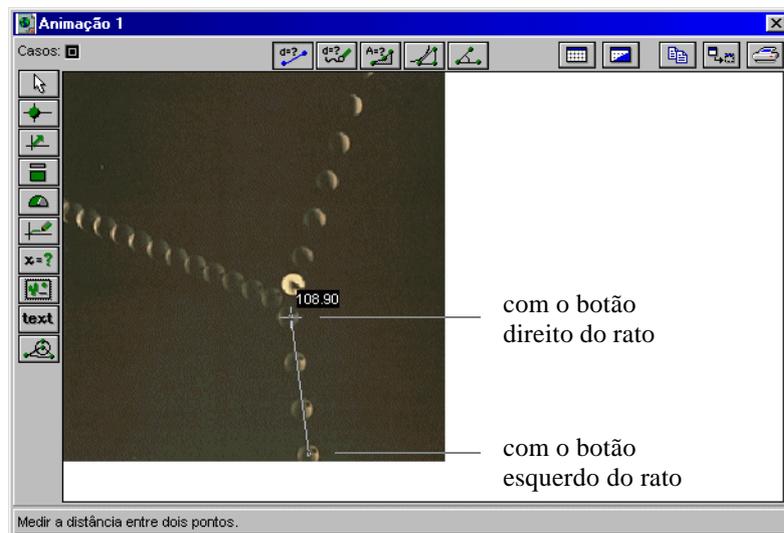
Um exemplo de medida de uma distância sobre uma fotografia:



1. Utilizando o botão “Definição de fundo”, , colocou-se uma imagem no fundo da janela (as imagens devem estar num dos formatos seguintes: GIF ou BMP):

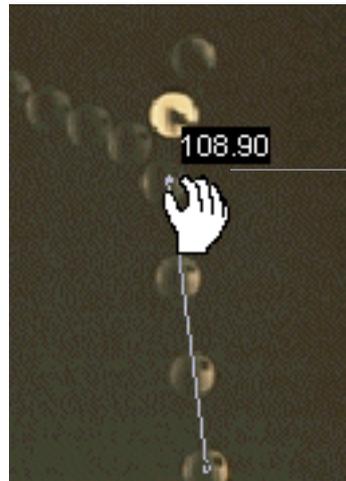


Para medir uma distância, clicar com o botão esquerdo no início da distância da distância a medir e com o botão direito no fim dessa distância.



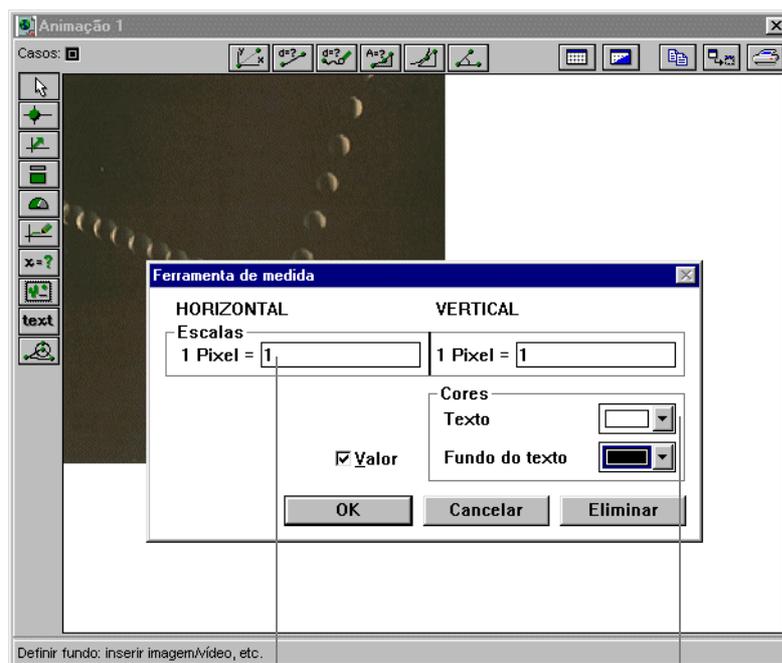
---

Se necessário, pode ajustar-se a posição de qualquer dos pontos do medidor de distâncias, utilizando o **botão esquerdo** do rato:



ajuste (arrastar com o botão esquerdo)

Pode igualmente editar-se a escala do medidor e as cores dos valores de medida, clicando com o **botão direito** sobre qualquer dos pontos extremos do medidor de distâncias:



definição de escala

definição de cor de texto e de cor de fundo da medida

Procede-se de modo idêntico para eliminar a medida.

Medir distâncias sobre a trajectória



Esta ferramenta permite medir distâncias segundo trajectórias não rectilíneas. Os *sucessivos pontos* são criados com o **botão esquerdo** do rato e o **último ponto** é criado com o **botão direito**:



Os vários pontos são definidos com o botão direito. O último, com o botão esquerdo.

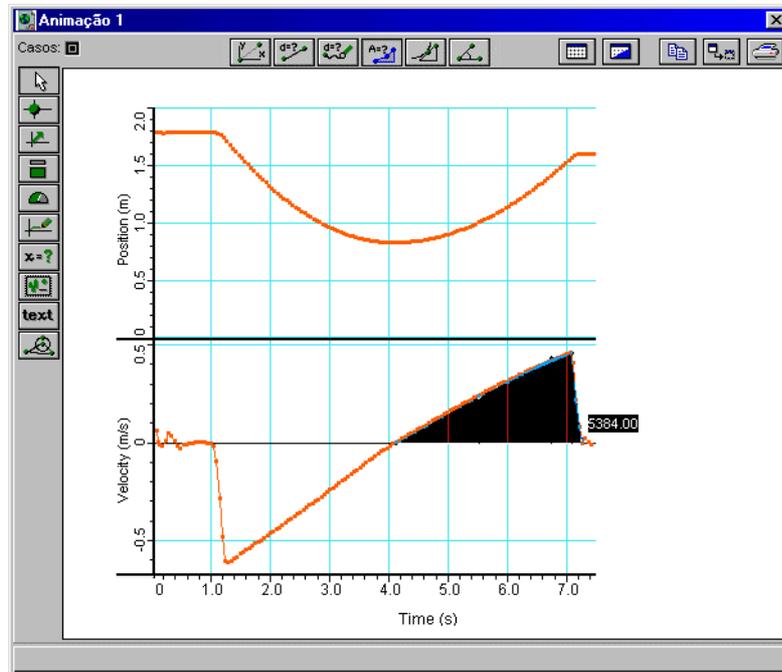
A edição da escala e das cores, uma vez criada a medida, pode ser feita com o botão direito.

## Medir áreas



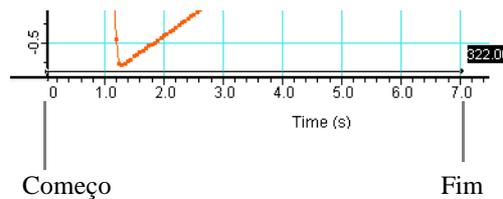
Este medidor é especialmente adequado para medir áreas em gráficos. A sua utilização é semelhante aos restantes: botão esquerdo para criar pontos (ou alterar a posição, uma vez criados) e botão direito para terminar (ou para editar escalas e cores, depois de já estar na janela).

Começamos por colocar uma imagem (GIF ou BMP) de um conjunto de resultados experimentais (a pasta “sensors” do *Modellus* tem dezenas de imagens referentes a uma grande variedade de experiências):



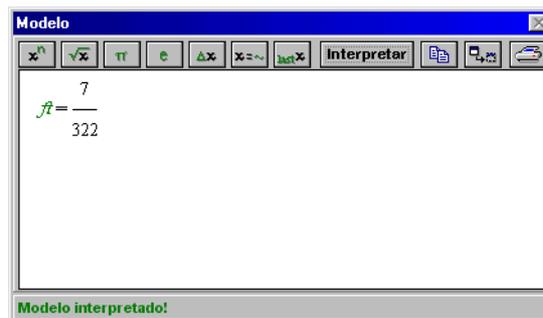
Na maior parte das vezes, é necessário **determinar as escalas dos gráficos ou das fotografias**. Essa definição pode ser feita do seguinte modo:

1. Utiliza-se o medidor de distâncias nas escalas do gráfico:

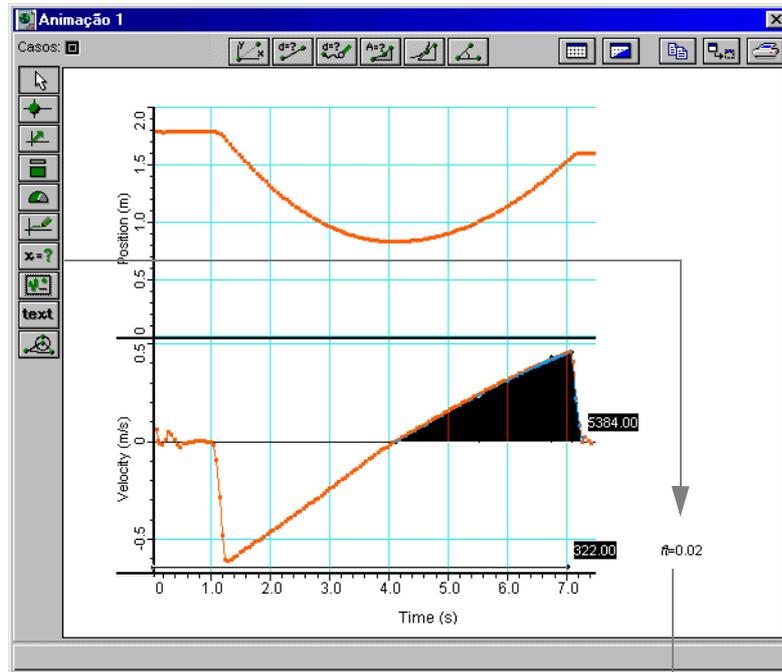


7.0 s do gráfico correspondem a 322 pixels.

2. Define-se na janela “Modelo” uma variável do **factor de escala** (7 segundos para 322 pixels, neste exemplo):

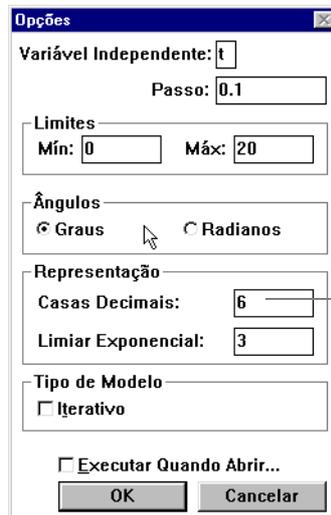


- Afixa-se o valor dessa variável na janela de “Animação”, utilizando o botão “Medidor Digital”, :



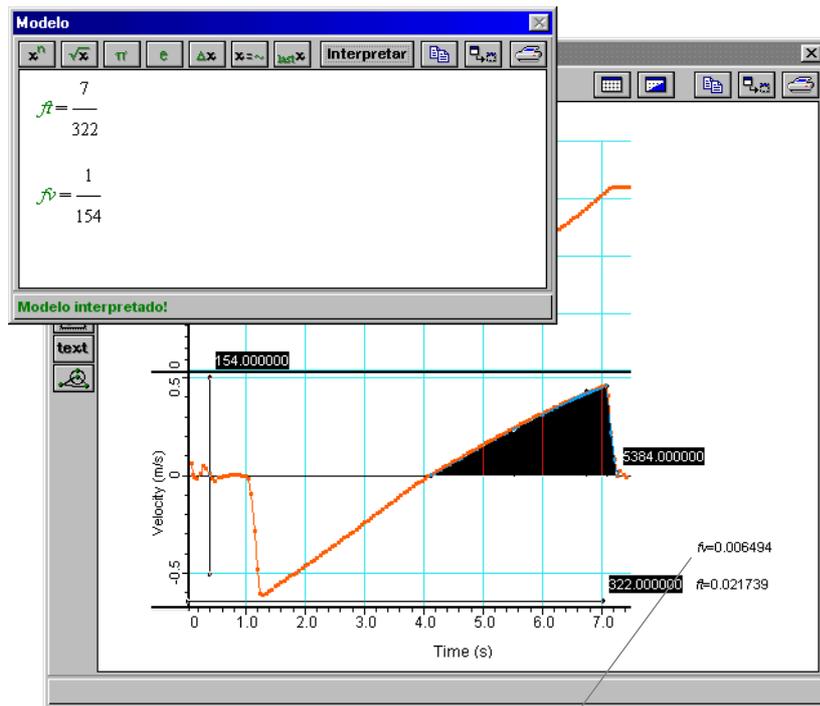
Factor de escala no eixo do tempo.

- Aumenta-se o número de casas decimais (botão “Opções” na janela de “Controlo” para, por exemplo, 6 casas decimais:



6 casas decimais em todos os valores.

5. Procede-se de modo semelhante para determinar o factor de escala vertical:



Factor de escala no eixo da velocidade.

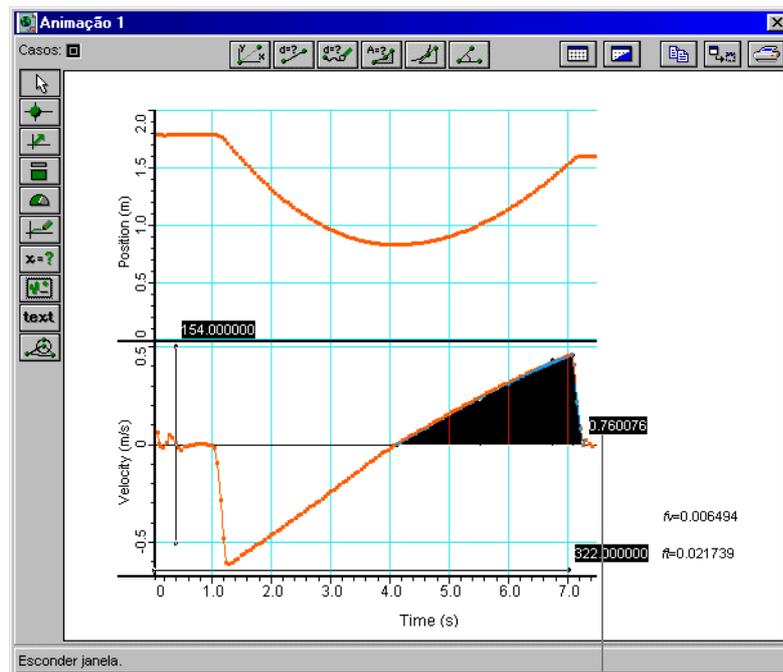
6. Com o botão direito do rato editam-se as propriedades da área a medir e escrevem-se os respectivos factores de escala:



Factor de escala no eixo do tempo.

Factor de escala no eixo da velocidade.

7. O valor da área sob o gráfico, no intervalo de tempo considerado, está agora correcto:



Área sob o gráfico, no intervalo de tempo de 4,2 s a 7,3 s.

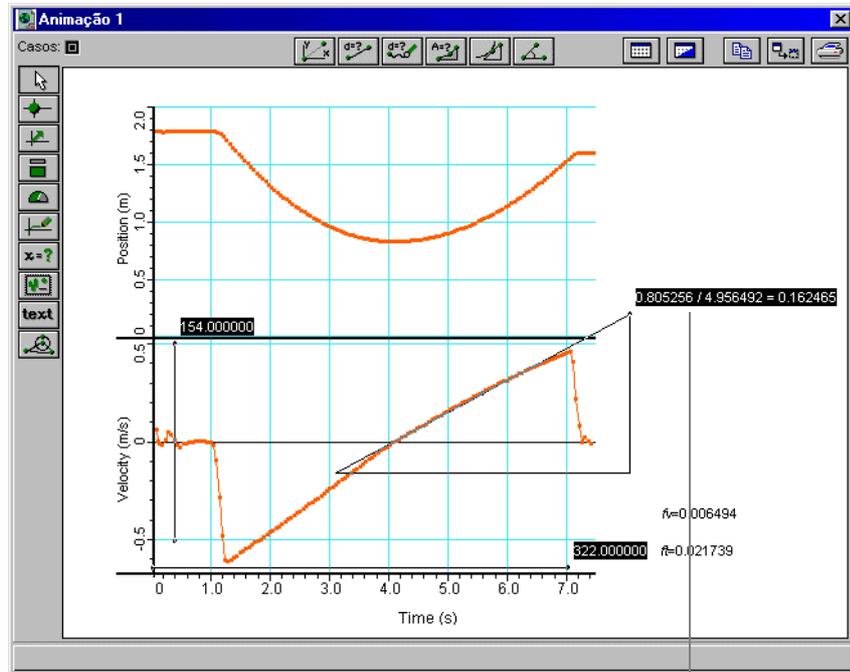
## Medir declives



O processo de medida de declives é semelhante ao de medida de áreas:

1. botão esquerdo para criar o ponto onde se pretende medir o declive (e para modificar a respectiva posição);
2. botão direito para definir a tangente (ou para modificar escalas e cores).

A figura seguinte mostra um exemplo de determinação de um declive, utilizando as escalas obtidas no exemplo anterior (medida de áreas):



Declive do gráfico  
(tendo em conta as  
respectivas escalas).

## Medir ângulos



A medição de ângulos pode ser feita em graus ou em radianos. Note-se, no entanto, que as unidades desta ferramenta de medida não dependem da selecção da opção Radianos/Graus no botão “Opções” da janela de “Controlo”.

A figura seguinte mostra um exemplo de medida de um ângulo (por vezes, pode ser necessário ajustar o ângulo a medir, definindo um ângulo agudo):

The screenshot displays a software interface for a physics simulation. It consists of three main windows:

- Modelo:** Contains mathematical expressions for the simulation. The first line is  $angulo\_I = 360 - 328.34$ . The second line is  $angulo\_R = 20.70$ . The third line is the formula for the refractive index: 
$$n = \frac{\sin(angulo\_I)}{\sin(angulo\_R)}$$
- Controlo:** A control window with a slider set to  $t = 0.00$  and a range from 0 to 20. It includes playback controls and an "Opções ..." button.
- Animação 1:** The main animation window. It shows a diagram of a glass of water with a light ray passing through it. The incident angle is labeled as 328.34 and the refracted angle as 20.70. To the right of the diagram, the text reads "índice de refração" and  $n=1.48$ . The window has a toolbar with various icons and a vertical toolbar on the left.

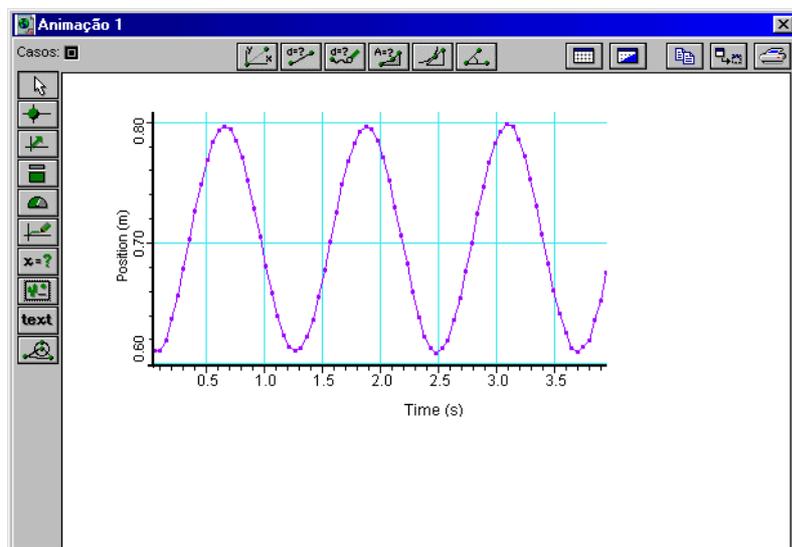
Utilizando as ferramentas de medida para construir modelos a partir de dados experimentais

Analisemos diversos exemplos de construção de modelos a partir de dados experimentais, registados com sensores e interfaces computacionais. Em todas as situações, começa-se por colocar a imagem com os dados no fundo da janela de “Animação”. Os exemplos a analisar são:

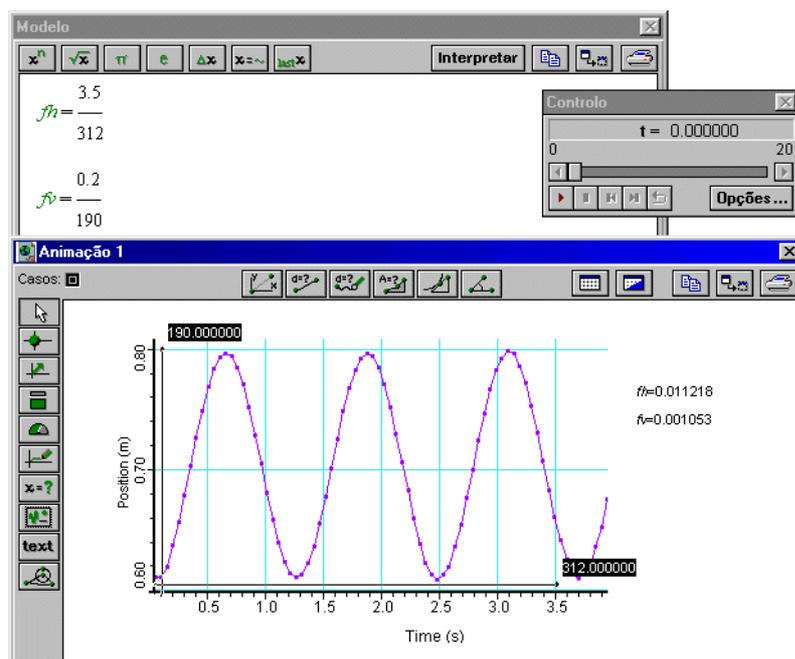
1. Um oscilador mecânico.
2. A descarga de um condensador.
3. Um movimento acelerado.
4. Um movimento retardado, seguido de movimento acelerado.

Um exemplo com um oscilador

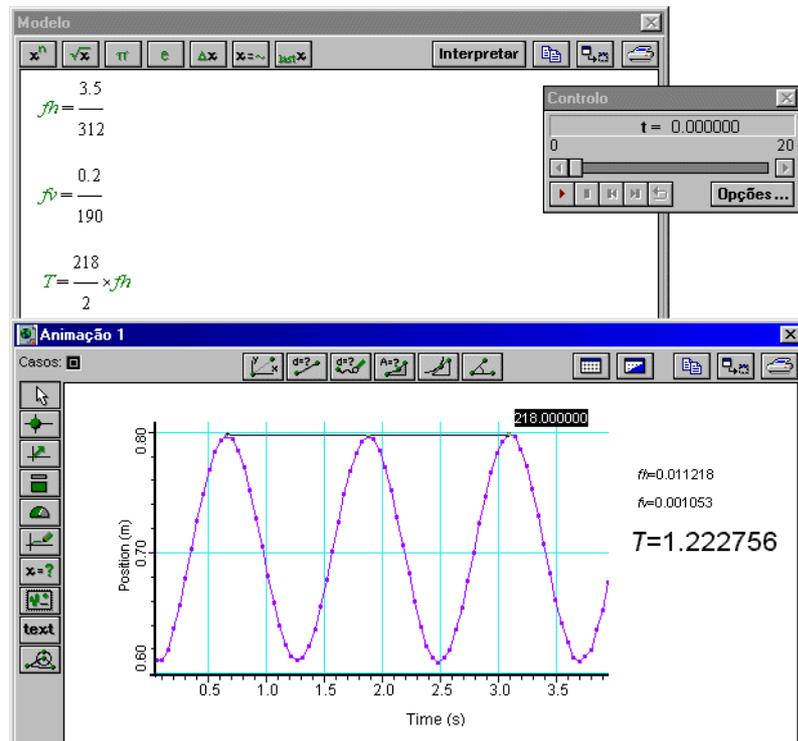
1. Colocou-se uma imagem (C:\modellus\sensors\mhs4.gif) de um conjunto de dados referentes à posição de um oscilador mecânico (um pêndulo elástico vertical) na janela “Animação”:



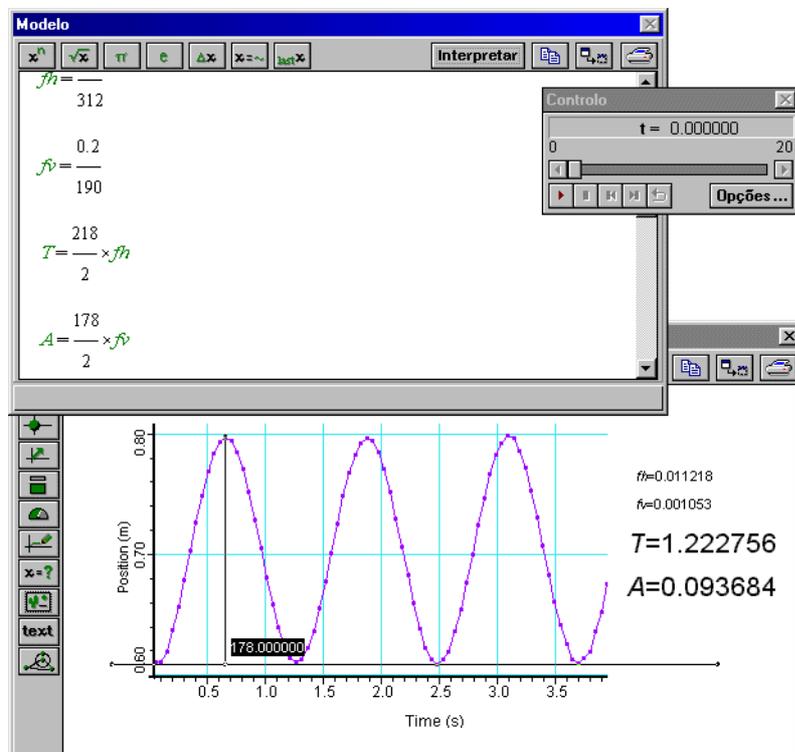
2. Determinaram-se os factores de escala horizontal e vertical:



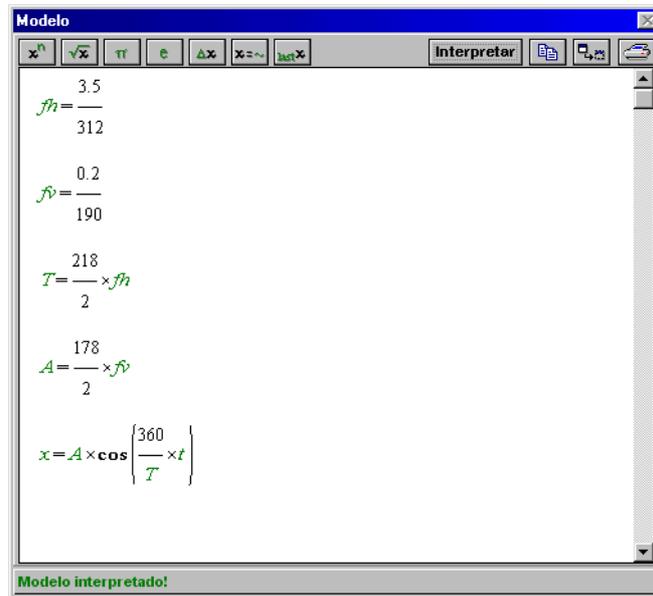
3. Mediu-se o período da oscilação (determinou-se a distância entre dois picos para diminuir a incerteza de medição):



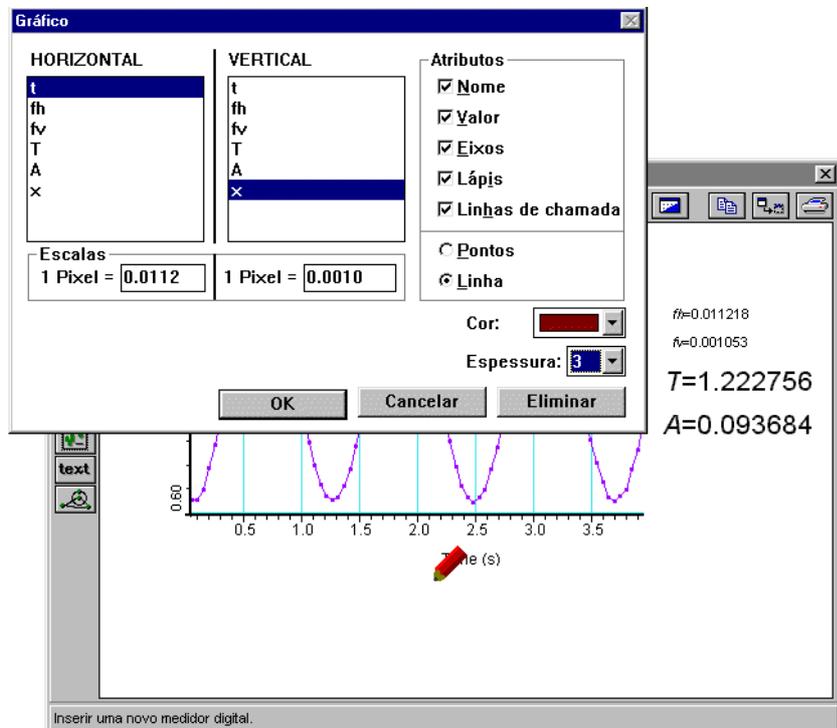
4. Mediu-se a amplitude da oscilação:



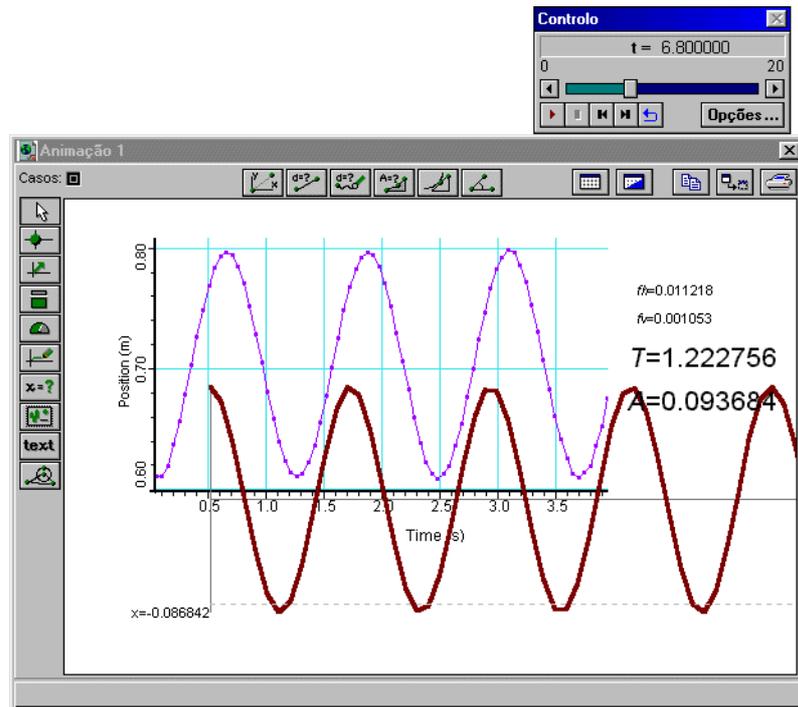
5. Escreveu-se um modelo para o oscilador (frequência angular em graus/s — para utilizar a frequência em radianos/s era necessário seleccionar “Radianos” na janela de “Controlo”, botão “Opções”):



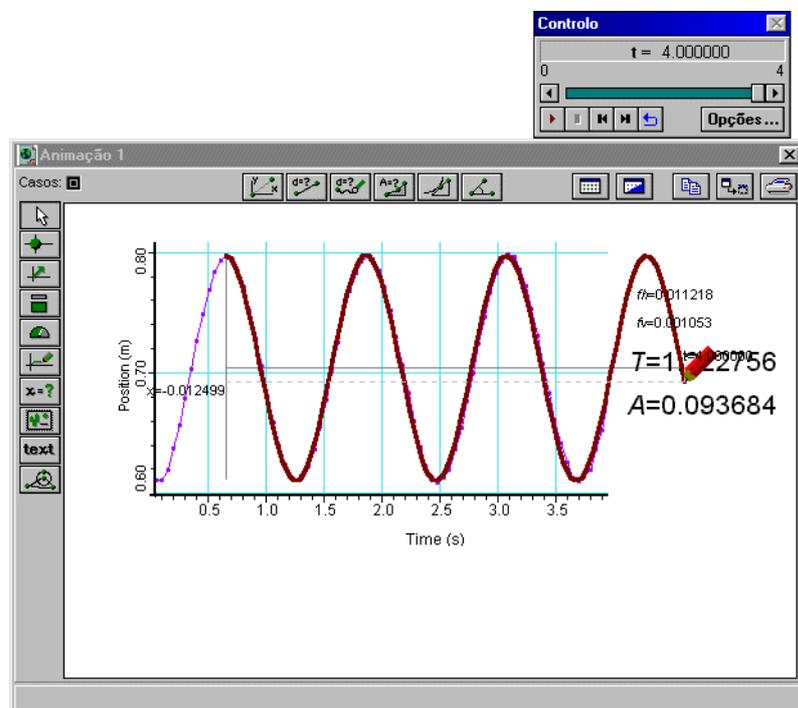
6. Criou-se um “Lápis” na janela de “Animação” para representar o gráfico do modelo obtido, utilizando como escalas os factores de escala já determinados:



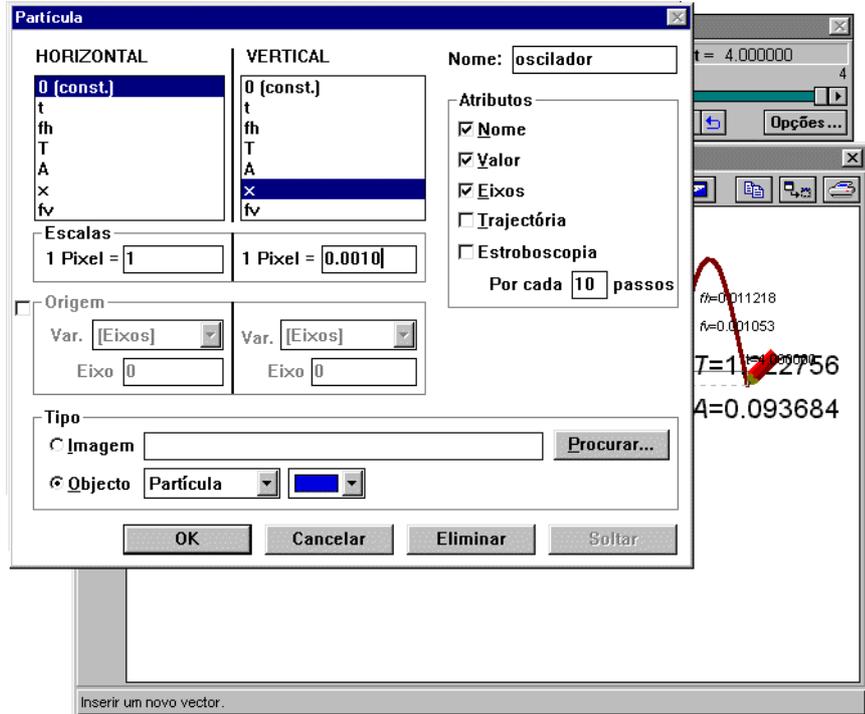
7. Executou-se o modelo — botão Começar, na janela “Controlo”:



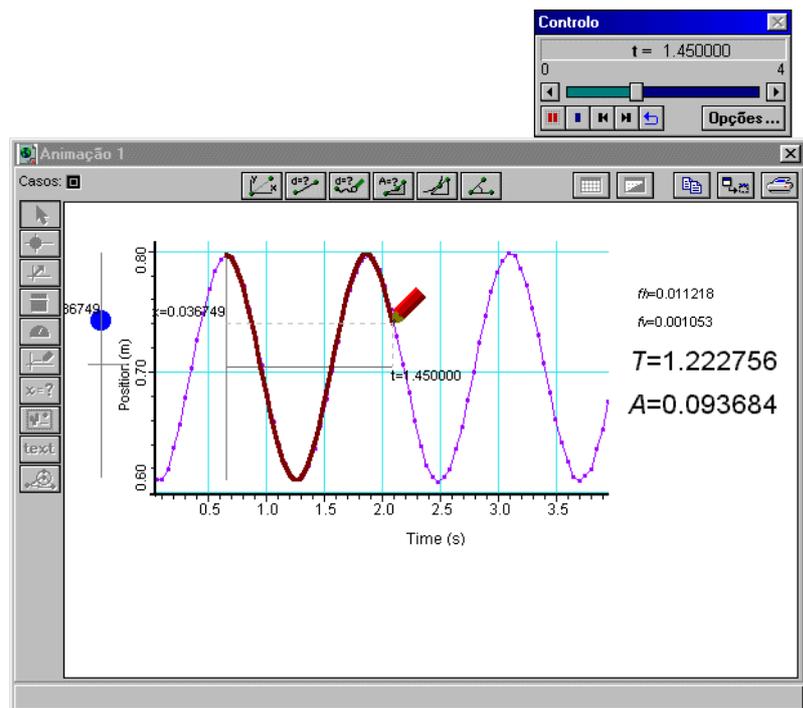
8. É conveniente reduzir o passo para, por exemplo, 0.05 s, e diminuir o valor máximo de  $t$  para 4 s. Pode também colocar-se o gráfico de modo a coincidir com os resultados experimentais:



9. O modelo está aceitável. Agora só falta determinar a fase inicial e adequar o modelo ao facto da posição de equilíbrio não ser 0 m... Mas antes ainda se pode colocar uma partícula a representar o oscilador, na vertical, com uma escala igual à do gráfico:



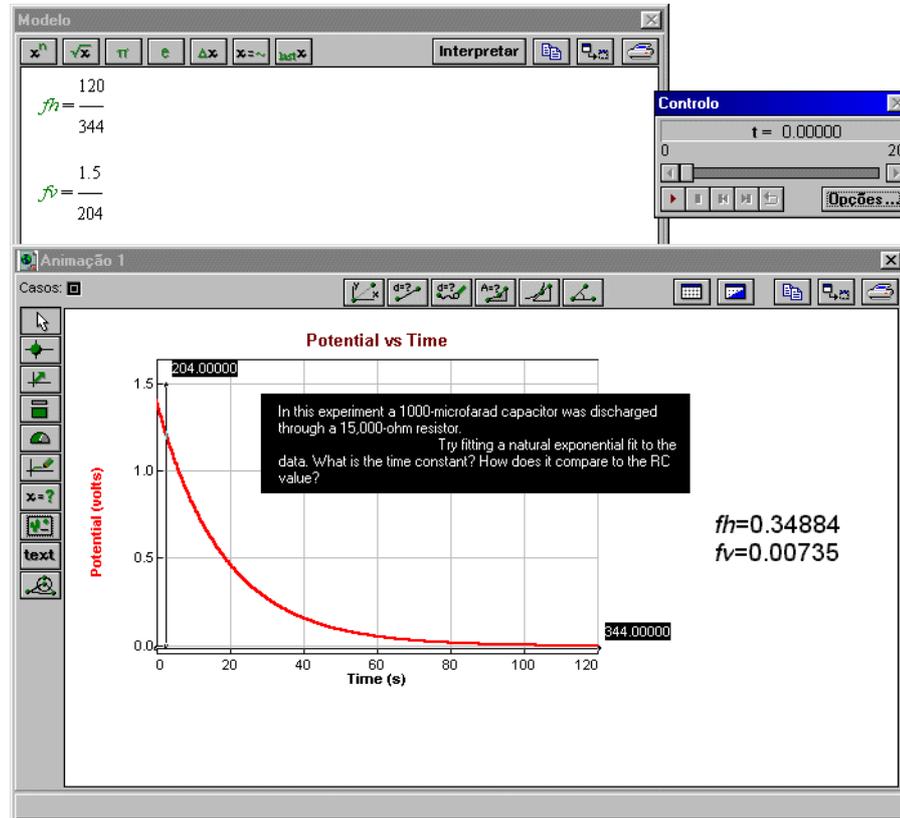
10. Agora pode observar-se a construção do gráfico em simultâneo com o movimento do oscilador:



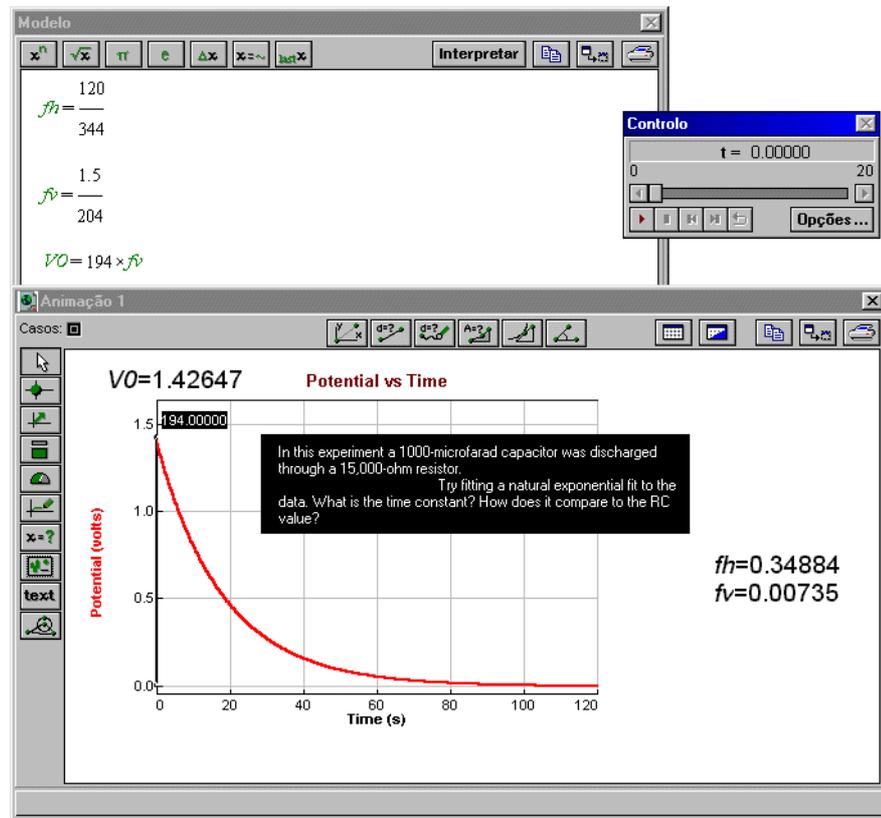
Um exemplo com uma descarga de um condensador

A imagem seguinte refere-se à descarga de um condensador (C:\modellus\sensors\discharge1.gif) . Pretende-se construir o modelo de decaimento exponencial que descreve o potencial  $V$  nos extremos do resistor, em função do tempo ( $V = V_0 e^{kt}$ ), em que  $k = \ln(0.5)/T_{0,5}$ , sendo  $T_{0,5}$  o semi-período (tempo que demora  $V$  a diminuir para metade,  $V/2$ ) e  $V_0$  o potencial no instante inicial.

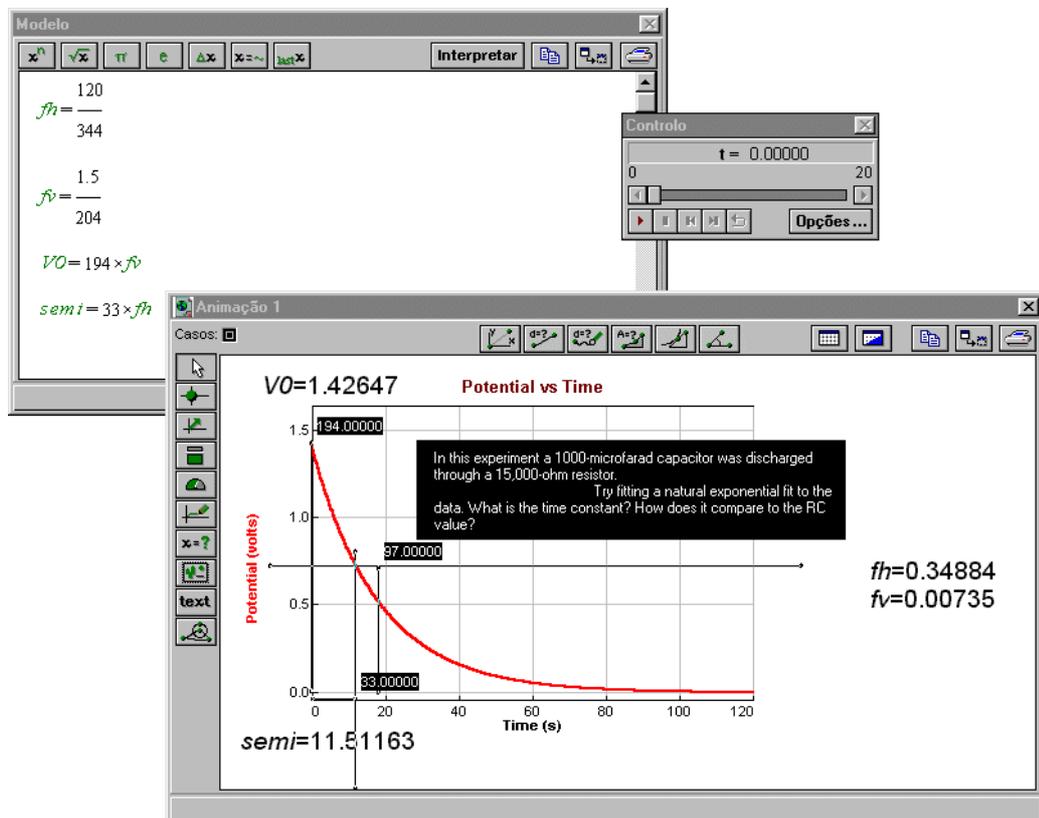
1. Começa-se por determinar os factores de escala:



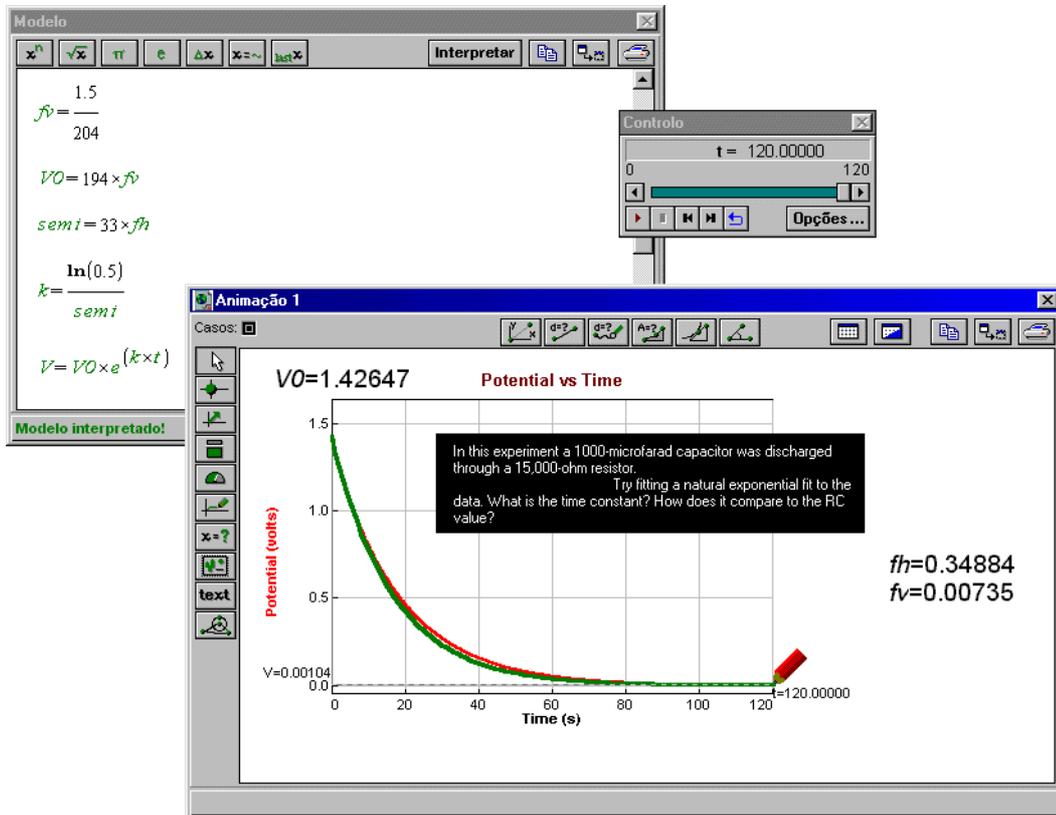
2. Mede-se o valor de  $V_0$ :



3. Determina-se o semi-período, medindo quanto tempo demora  $V$  a diminuir para metade:



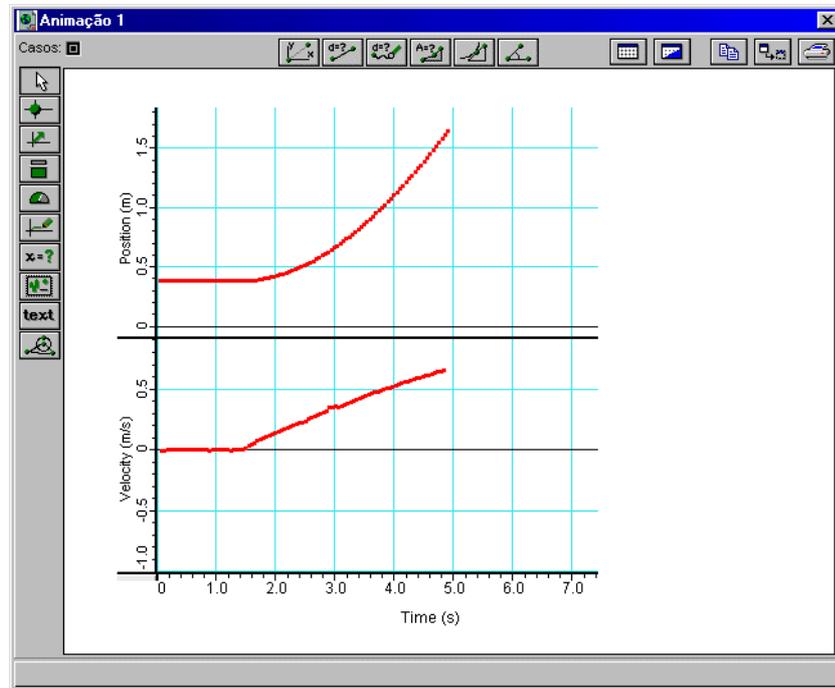
4. Escreve-se o modelo de  $V$  e cria-se um gráfico (“Lápis”) para representar essa função, em sobreposição aos dados experimentais (note-se que as escalas do gráfico devem ser as adequadas; o limite superior de  $t$  também foi alterado para 120):



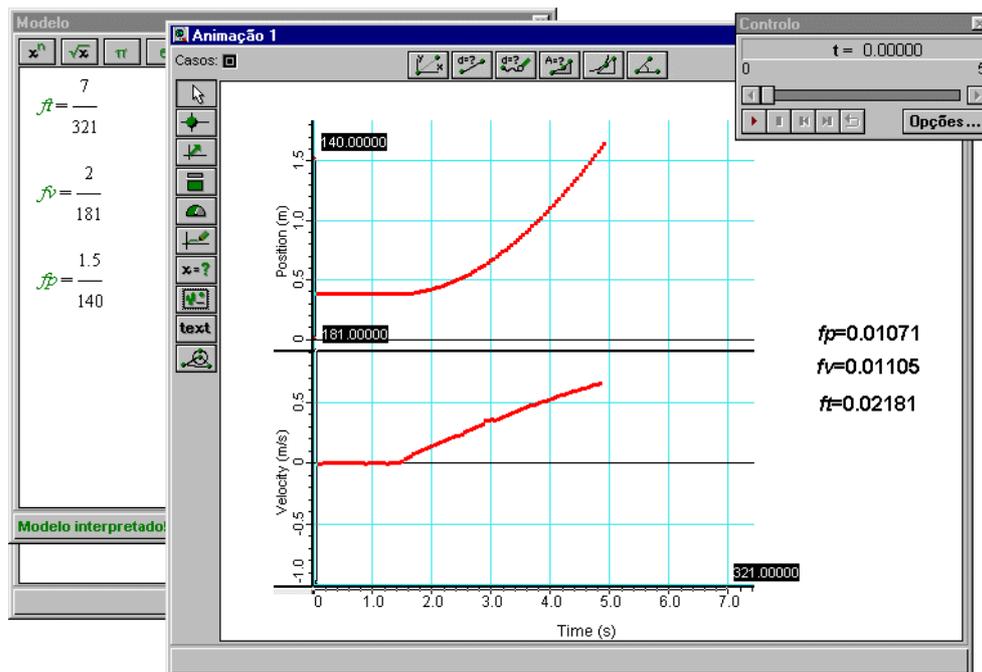
5. Este modelo pode ser facilmente melhorado. Por exemplo, poderia melhorar-se a determinação do semi-período, medindo quanto tempo demorou a passar de  $V_0/2$  a metade de  $V_0/2$  e fazer uma média das duas determinações.

Um exemplo com um movimento acelerado

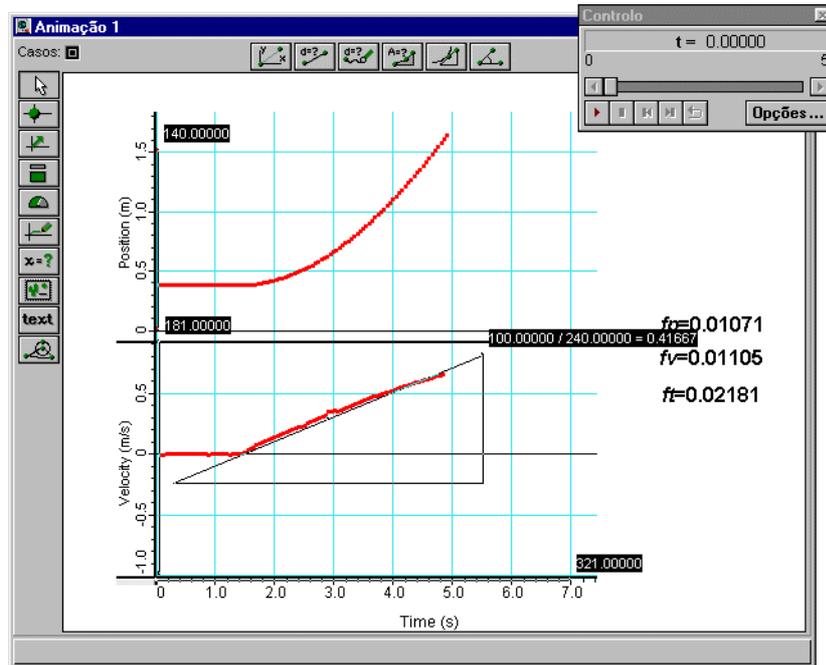
Os dados seguintes referem-se a um movimento acelerado de um carro para experiências de movimento (ficheiro c:\modellus\sensors\acell1.gif). A força responsável pela aceleração é exercida por uma ventoinha accionada por um motor eléctrico, colocada no carro. Pretende-se determinar o modelo do movimento e representar esse movimento.



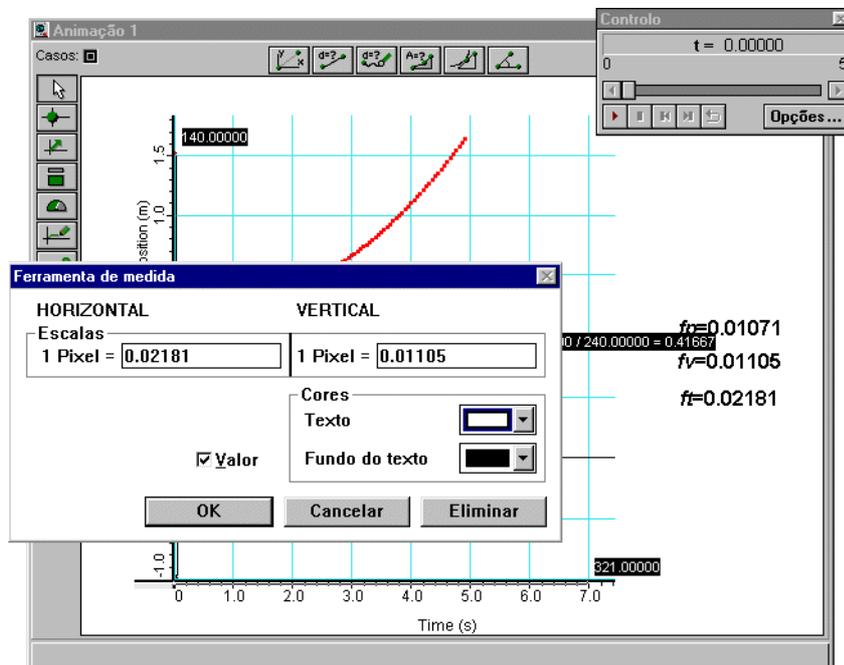
1. Começa-se como nos exemplos anteriores, por determinar os factores de escala:



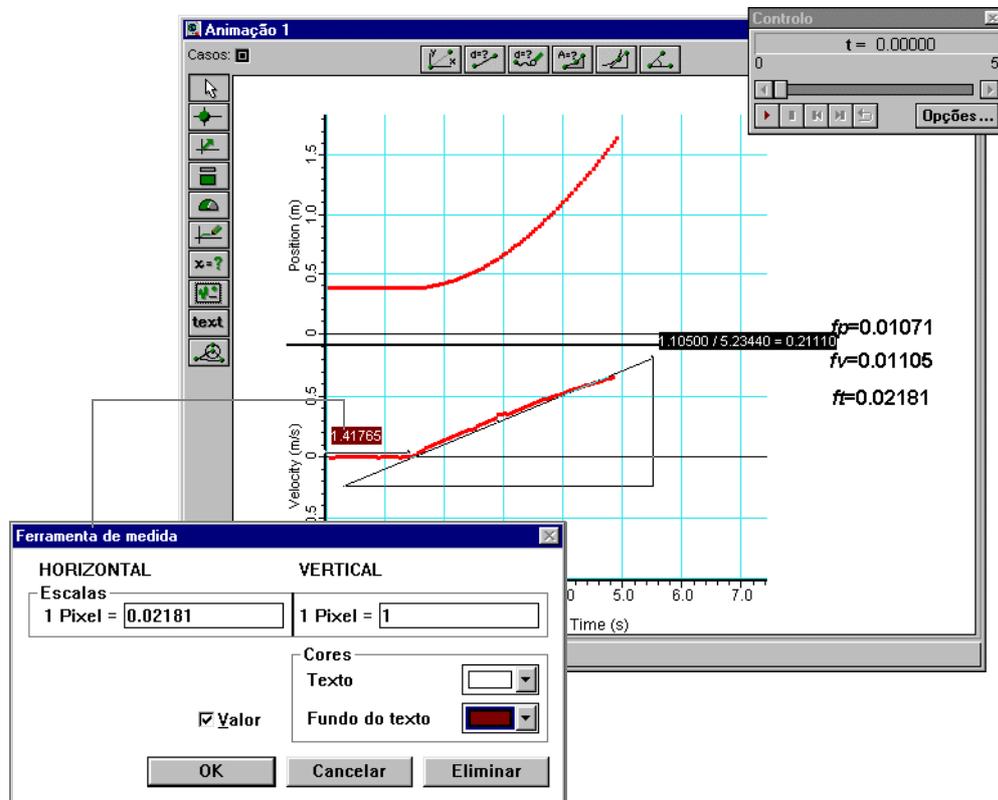
2. Mede-se o declive do gráfico da velocidade:



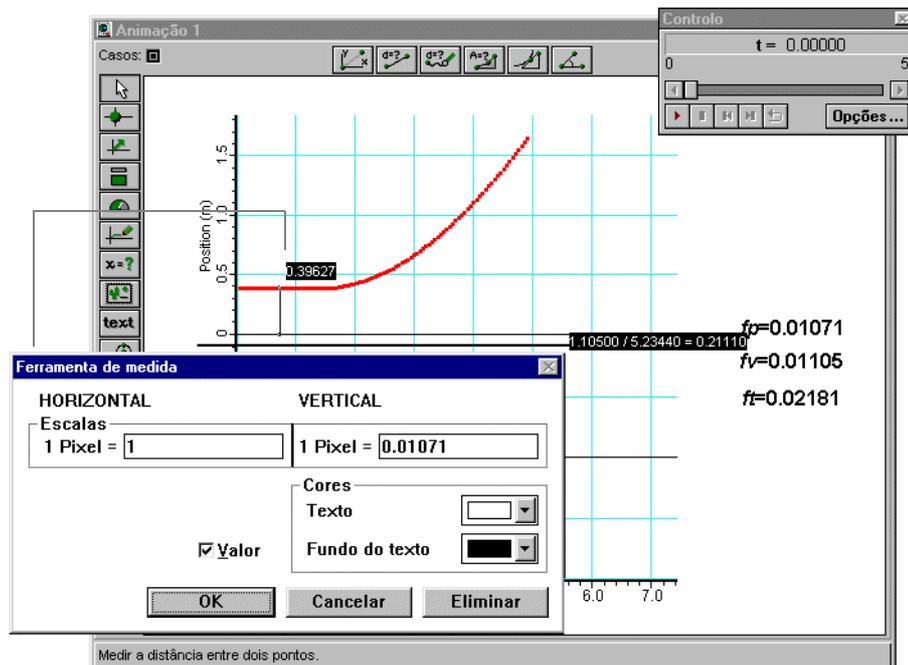
3. Edita-se a medição do declive, com o botão direito, e introduzem-se as escalas do gráfico da velocidade. Obtém-se, assim, a aceleração do movimento:



- Determina-se o intervalo de tempo em que o carro esteve parado antes de acelerar (pode introduzir-se o factor de escala do tempo para obter a medida directa desse intervalo de tempo):



- Mede-se a posição do carro, antes de iniciar o movimento (note-se a escala utilizada, a escala da posição):



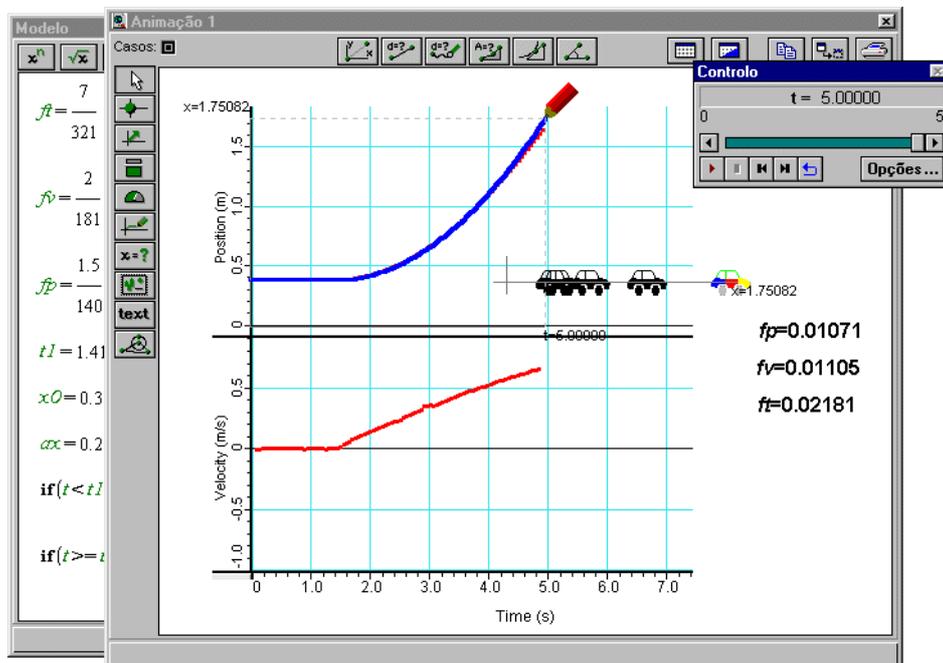
6. Estamos agora em condições de escrever o modelo do movimento do carro (note-se o “atraso”  $tI$  no segundo ramo da função que descreve o movimento):

```

Modelo
-----
 $f\ddot{x} = \frac{7}{321}$ 
 $f\dot{v} = \frac{2}{181}$ 
 $f\dot{p} = \frac{1.5}{140}$ 
 $tI = 1.41765$ 
 $xO = 0.39627$ 
 $\alpha x = 0.21110$ 
if ( $t < tI$ ) then ( $x = xO$ )
if ( $t \geq tI$ ) then ( $x = xO + \frac{1}{2} \times \alpha x \times (t - tI)^2$ )

```

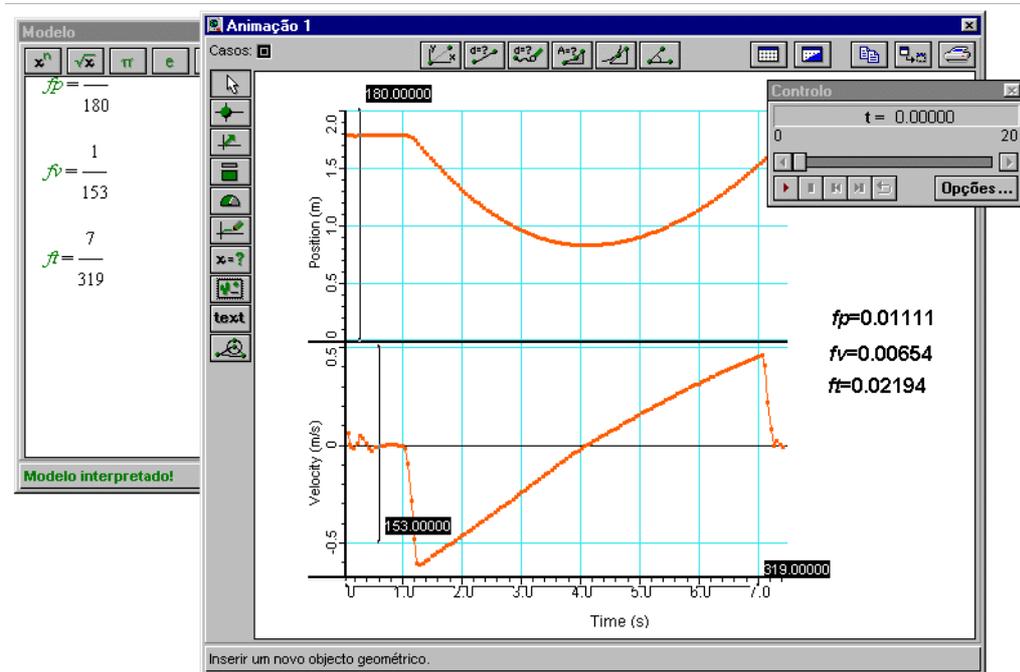
7. Cria-se, finalmente, um gráfico na mesma escala e, já agora, uma imagem (considerada como uma partícula) para representar o movimento do carro (a escala da coordenada horizontal deve ser suficientemente pequena para se observar movimento—porquê?):



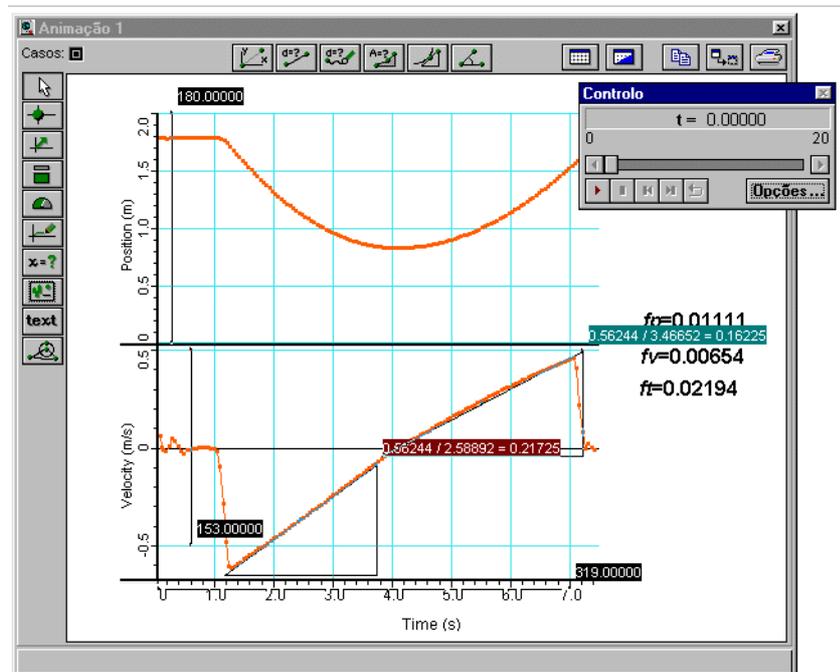
Um exemplo com um movimento retardado seguido de movimento acelerado

Os dados seguintes (C:\modellus\sensores\acel5.gif) referem-se a um movimento de um carro de laboratório que se move por acção de uma pequena ventoinha. Pretende-se construir o modelo do movimento.

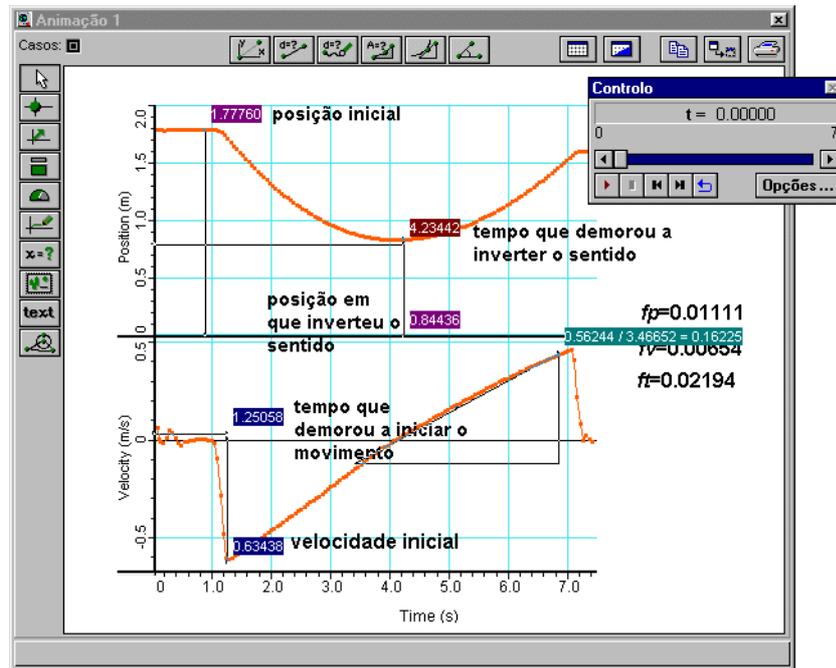
1. Determinação dos factores de escala:



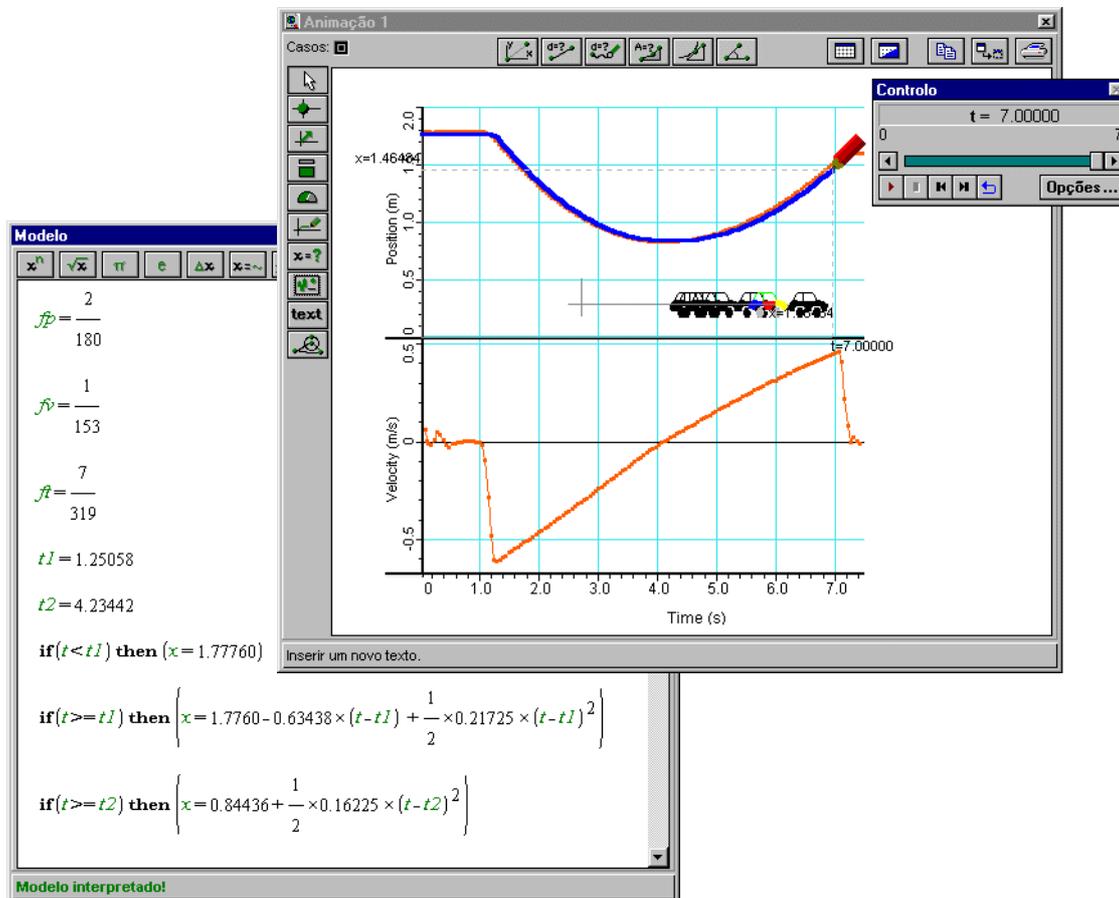
2. Determinação da aceleração na primeira fase do movimento (movimento retardado) e na segunda fase (movimento acelerado) — tendo em conta as respectivas escalas:



3. Determinação dos restantes parâmetros relevantes para a construção do modelo:

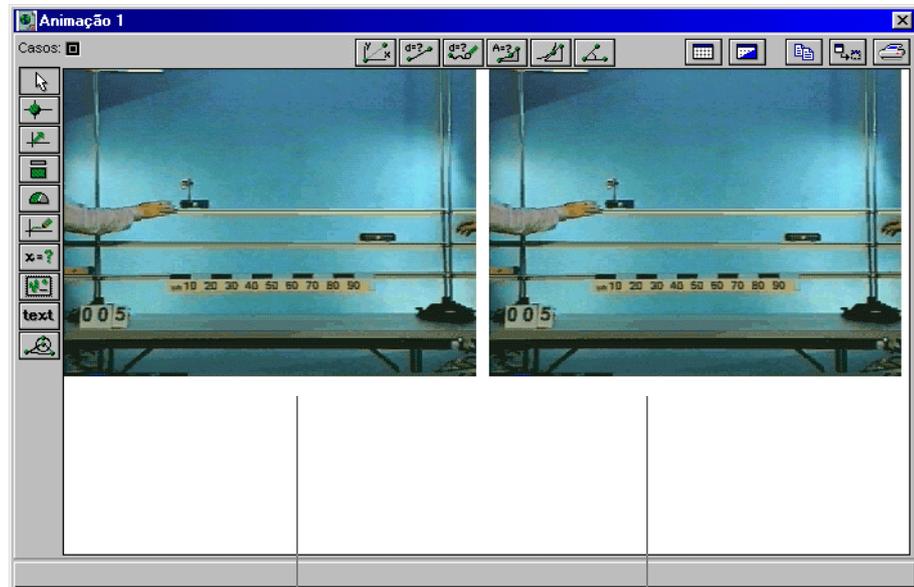


4. Construção e teste do modelo:



## Análise de vídeos

Utilizando o botão “Definição de fundo”, , colocou-se um vídeo (C:\modellus\videos\pasco005.avi) no fundo da janela, surgindo duas imagens:



Este vídeo mostra o movimento de três carros para experiências de dinâmica. O carro de cima tem uma ventoinha que o empurra no sentido oposto da velocidade inicial que lhe é conferida pela acção da mão.

Original do vídeo. Não permite visualizar qualquer outro objecto sobreposto.

Cópia do vídeo.

A imagem da esquerda funciona como uma espécie de “vídeo original”: nesta zona da animação nada é visualizável, excepto o vídeo.

A imagem da direita é uma “cópia” da imagem da esquerda (cópia do ecrã, o que implica não ser conveniente ter qualquer outra janela, como a janela “Modelo”, sobre o vídeo original). Sobre a imagem da direita pode colocar-se qualquer outro objecto.

## Sincronização do vídeo

O vídeo pode ser sincronizado com o passo da variável dependente. Se se conhecer qual é o número de imagens (“frames”) por segundo, utiliza-se este valor para definir o passo do modelo no botão “Opções”, janela “Controlo”.

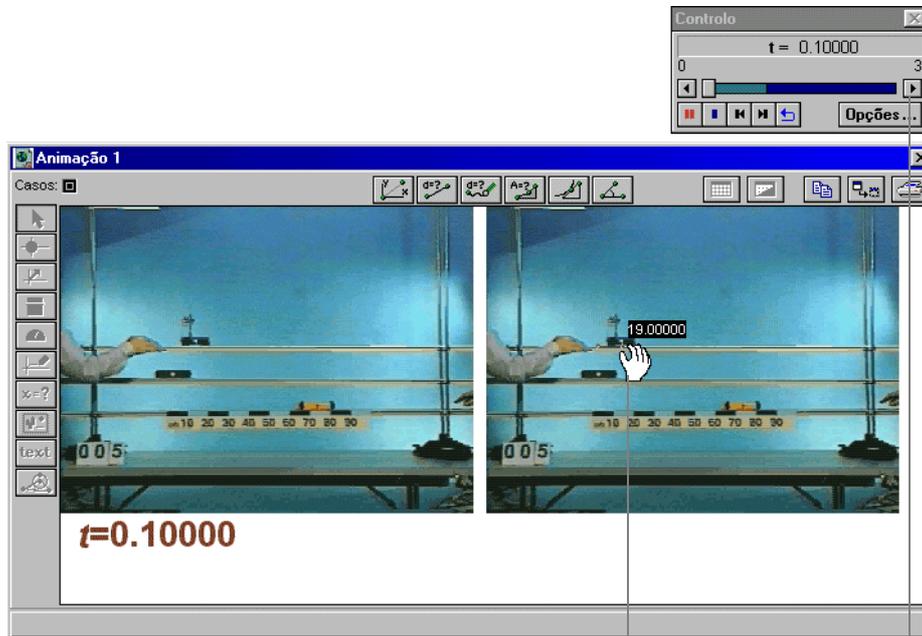
Por exemplo, para o vídeo da imagem anterior, tem-se 10 “frames” por segundo. Assim, o tempo entre cada “frame” é de  $1/10 \text{ s} = 0,1 \text{ s}$ . É este valor que deve ser introduzido na janela “Controlo”. Se se introduzir um valor inferior, por exemplo 0,01 s, o vídeo é passado 10 vezes mais lentamente, sem interpolação de imagens (logo, os “saltos” entre cada imagem podem ser facilmente visíveis).

É também conveniente determinar quanto tempo demora o vídeo a correr para definir o valor máximo do tempo, a variável independente, na janela “Controlo”.

Medição sobre o vídeo

Pode utilizar-se qualquer das ferramentas de medida sobre o vídeo “cópia”, o da direita.

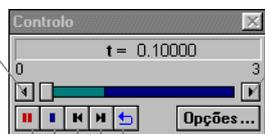
A imagem seguinte mostra a determinação da posição ao fim de 0,1 s, medindo a distância entre a posição inicial e a posição no instante 0,1 s:



Uma “frame” para trás

Uma “frame” para a frente

Uma vez executado o modelo, utilizou-se este botão para andar imagem a imagem



“Replay”

Ir para o último valor

Regressar ao valor inicial

Parar

Começar/pausa/recomeçar

Medindo a posição do carrinho ao fim de 0,1 s: 19 pixeis.

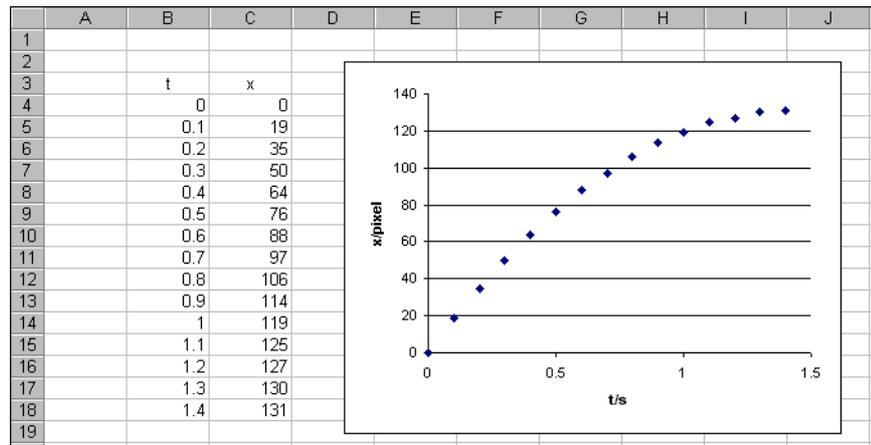
Quando se está utilizando o *Modellus* para fazer modelos a partir de dados, imagens e vídeos deve utilizar-se, em simultâneo e complementarmente, uma folha de cálculo (*Excel*, por exemplo).

Andando passo a passo, determina-se a posição de 0,1 s em 0,1 s. Essas medidas podem ser introduzidas numa folha de cálculo.

A figura ao lado mostra os resultados para a fase de movimento retardado do carro do vídeo acima:

	A	B	C
1			
2			
3		t	x
4		0	0
5		0.1	19
6		0.2	35
7		0.3	50
8		0.4	64
9		0.5	76
10		0.6	88
11		0.7	97
12		0.8	106
13		0.9	114
14		1	119
15		1.1	125
16		1.2	127
17		1.3	130
18		1.4	131

Utilizando estes dados, pode fazer-se um gráfico da posição em função do tempo:



O movimento é, pois, retardado. Admitamos que é uniformemente retardado. Deste modo, a posição do carro é descrita por um modelo do tipo

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 ,$$

e a velocidade por

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

em que  $x_0$  é a coordenada inicial,  $v_{0x}$  é a componente escalar da velocidade inicial e  $a_x$  é a componente escalar da aceleração, que é constante.

Se considerarmos a origem como posição inicial, temos apenas que obter a velocidade inicial e a aceleração. Vamos utilizar o *Excel* para obter estes parâmetros e, em seguida, comparar o modelo obtido com o vídeo.

Começemos por estimar a velocidade em cada instante, com exceção dos instantes inicial e final. Para tal, pode começar-se por calcular o quociente entre a mudança de posição e o respectivo intervalo de tempo, num intervalo de tempo de 0,1 s em torno de cada ponto. Por exemplo, a velocidade no instante 0,1 s é dada pelo quociente entre a posição no instante 0,2 s e a posição no instante 0,0 s, dividido pelo intervalo de tempo de 0,2 s:

$$v_{0.1x} = \frac{35 - 0}{0.2 - 0} = 175 \text{pixel/s}$$

De modo semelhante, a velocidade no instante seguinte é dada por:

$$v_{0.2x} = \frac{50 - 19}{0.3 - 0.1} = 155 \text{pixel/s}$$

E assim sucessivamente.

Calculando a velocidade inicial e a aceleração na folha de cálculo

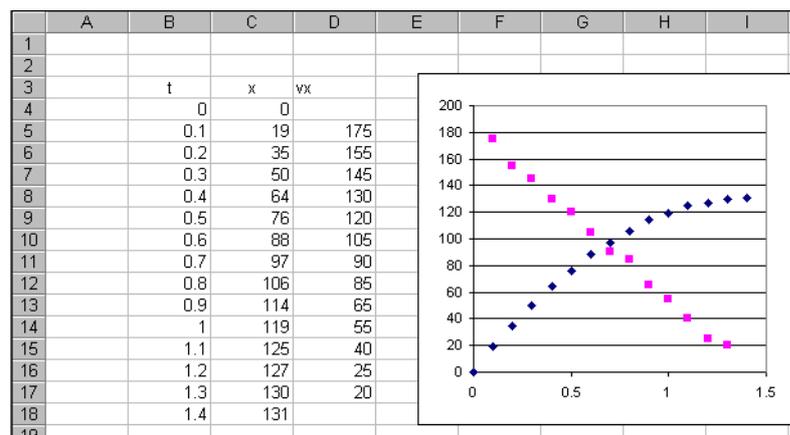
A folha de cálculo é especialmente apropriada para este tipo de cálculo. Pode, assim, definir-se na célula D5 a fórmula

$$=(C6-C4)/(B6-B4)$$

e duplicar essa célula para as restantes células até ao instante 1,3 s:

	A	B	C	D	E
1					
2					
3		t	x	v <sub>x</sub>	
4		0	0		
5		0.1	19	175	
6		0.2	35	155	
7		0.3	50	145	
8		0.4	64	130	
9		0.5	76	120	
10		0.6	88	105	
11		0.7	97	90	
12		0.8	106	85	
13		0.9	114	65	
14		1	119	55	
15		1.1	125	40	
16		1.2	127	25	
17		1.3	130	20	
18		1.4	131		
19					

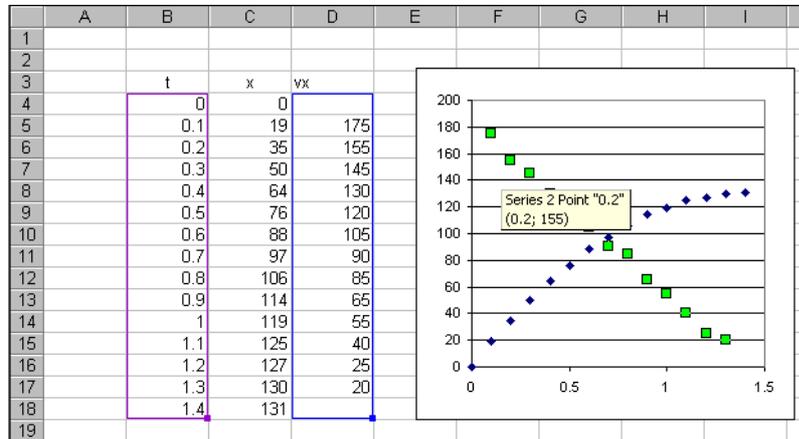
Ainda na folha de cálculo, analisemos um gráfico da velocidade em função do tempo, em simultâneo com o gráfico de posição:



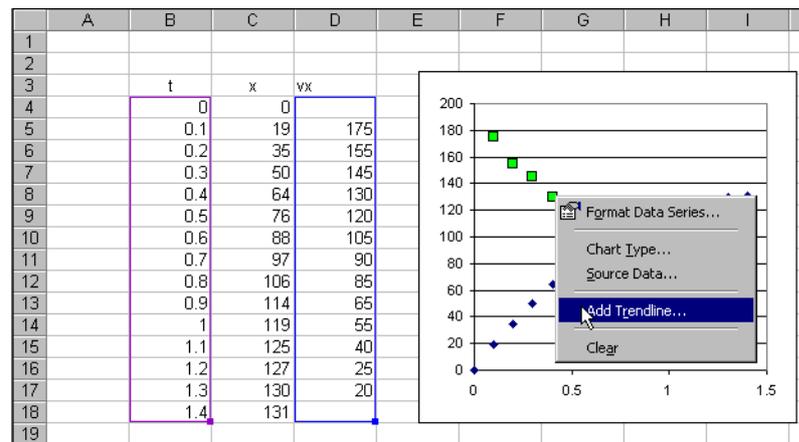
A velocidade aproxima-se de 0 à medida que o carro se aproxima do ponto em que volta para trás.

Inspeccionando visualmente o gráfico da velocidade, pode estimar-se o valor da velocidade no instante 0 s: é aproximadamente 190 pixels por segundo. Vejamos como obter este valor inicial, utilizando a possibilidade que o *Excel* tem de ajustar modelos a dados.

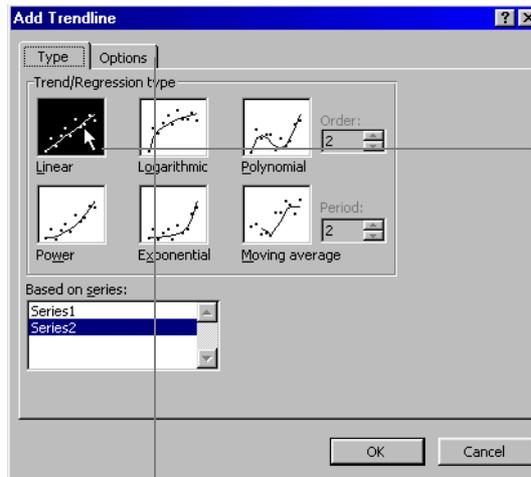
1. Seleccionam-se os dados de que se pretende o modelo (neste caso, o conjunto de valores da velocidade), fazendo clique sobre um dos pontos:



2. Com o botão direito do rato, activa-se o menu de opções do gráfico e selecciona-se a opção “Add Trendline”:



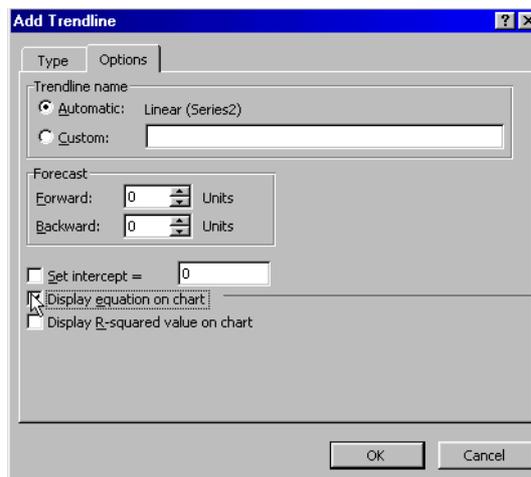
3. Escolhe-se a opção “Linear” e activa-se o segundo conjunto de opções em “Options”:



Modelo  
“Linear”

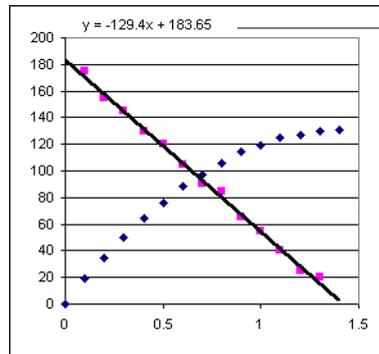
“Options”: segundo conjunto de  
opções para a “Trendline”

4. Selecciona-se a “check-box” “Display equation on chart”:



Clique para ver a  
equação junto ao  
gráfico.

5. Obtém-se, assim, a equação linear que melhor se ajusta aos dados experimentais:



Pode colocar-se a equação em qualquer zona do gráfico, utilizando o rato (botão esquerdo)

6. A ordenada na origem vale, pois, 183.65 unidades = 184 unidades. Como se trata de dados de velocidade, em pixels por segundo, tem-se 184 pixel/s. Este é o valor da velocidade no instante  $t = 0$  s, o instante inicial.
7. O declive do gráfico da velocidade, que corresponde à aceleração, é  $-129.4$  unidades =  $-129$  unidades. Este declive corresponde ao quociente variação de velocidade por intervalo de tempo. Logo, as suas unidades são  $-129$  (pixel/s)/s ou  $-129$  pixel/s<sup>2</sup>.
8. O movimento do carro é, pois, descrito pelas seguintes equações:

$$x = 184t + \frac{1}{2}(-129)t^2$$

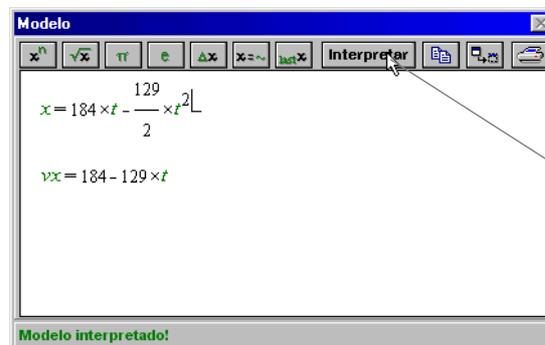
$$v_x = 184 + (-129)t .$$

Simplificando estas equações, obtém-se:

$$x = 184t - \frac{129}{2}t^2$$

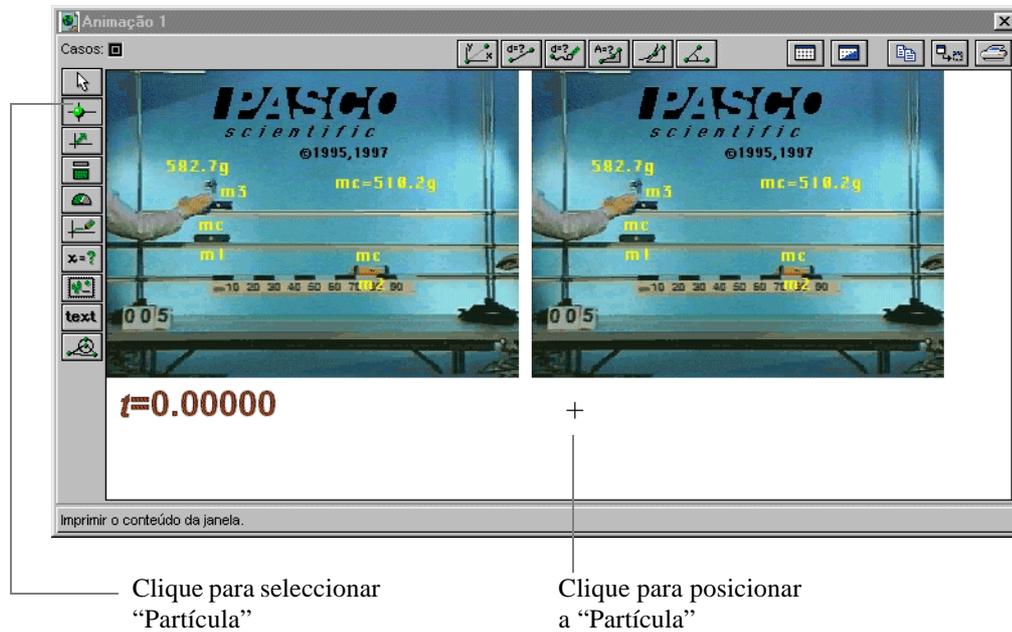
$$v_x = 184 - 129t .$$

9. Regressemos ao *Modellus*. Na janela “Modelo”, escrevemos estas equações e faz-se clique no botão “Interpretar”:

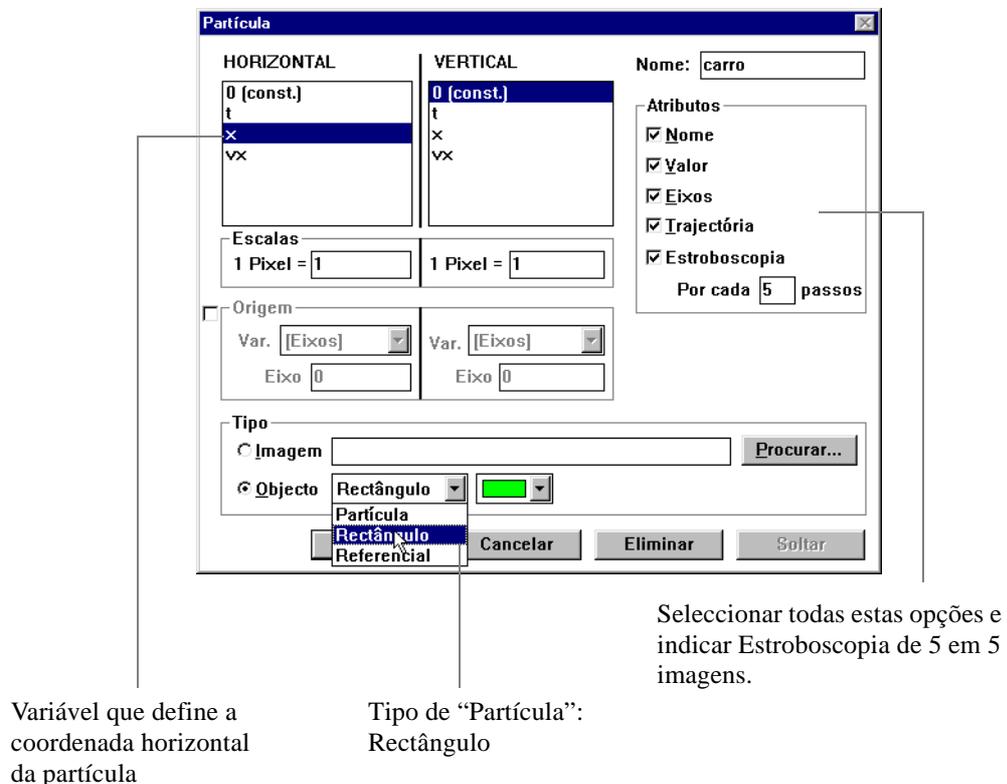


Interpretar

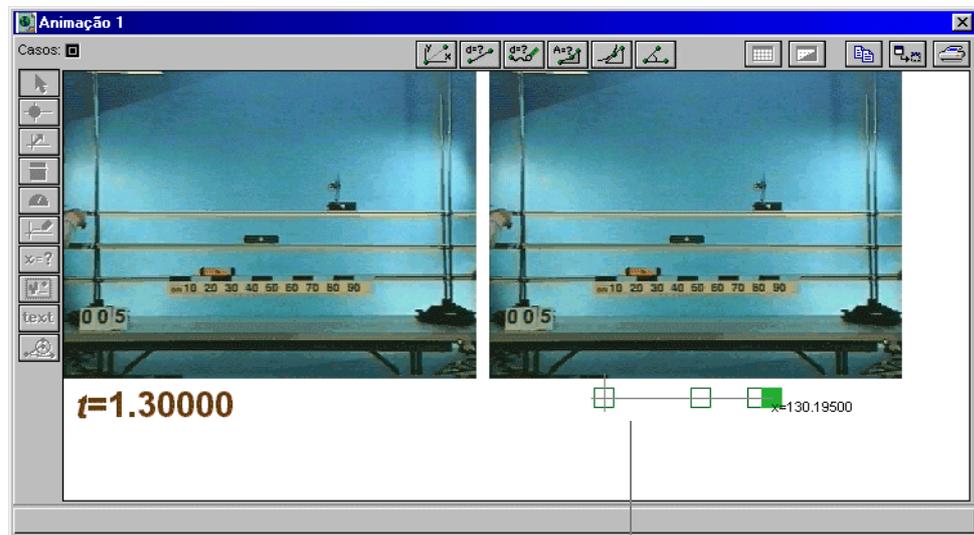
10. Na janela de “Animação”, onde está o vídeo, selecciona-se uma partícula e faz-se clique por debaixo do vídeo:



11. A coordenada horizontal da partícula (representada por um quadrado pequeno) deve mover-se de acordo com o valor de  $x$ . Pode seleccionar-se as opções “Trajectória” e “Estroboscopia”, de 5 em 5 imagens:



- Executa-se o modelo (botão “Começar” na janela de “Controlo”) e observa-se o movimento do carro, no vídeo, e o movimento da partícula, de acordo com o modelo obtido:



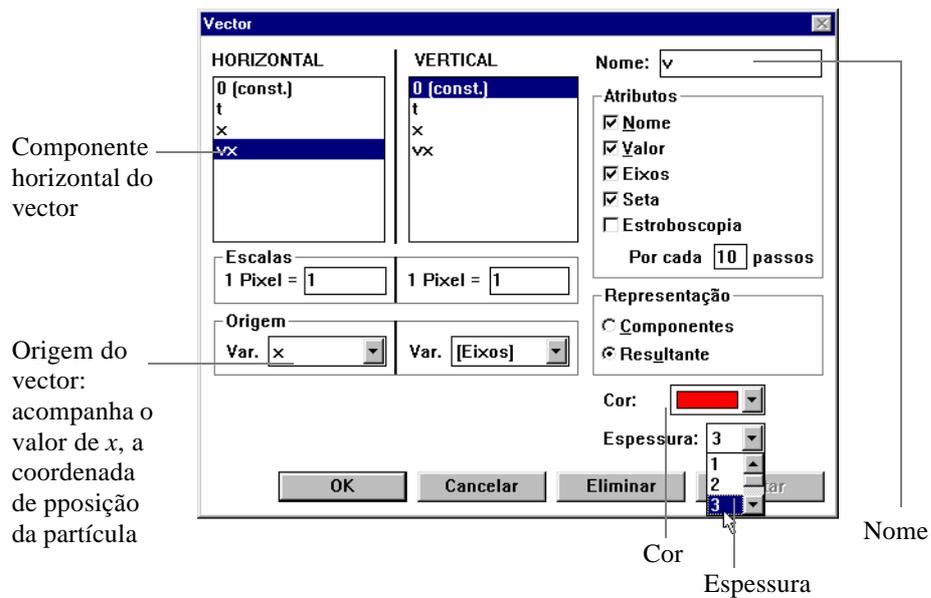
Movimento da partícula, de acordo com o modelo.

- Como se pode observar, o modelo é adequado apenas para a fase retardada do movimento... De facto, no regresso, a aceleração do carro tem uma magnitude superior à aceleração na fase retardada. Poderia desenvolver-se este modelo determinando a aceleração na segunda fase do movimento e construindo um novo modelo utilizando funções por ramos, com condições na variável independente.

14. Vamos agora acrescentar na janela de “Animação” um vector para representar a velocidade. Clica-se no botão “Vector” das ferramentas da esquerda da janela de “Animação” e coloca-se o vector por debaixo da partícula, por exemplo:



15. Na caixa de diálogo do “Vector”, indicar as seguintes características:

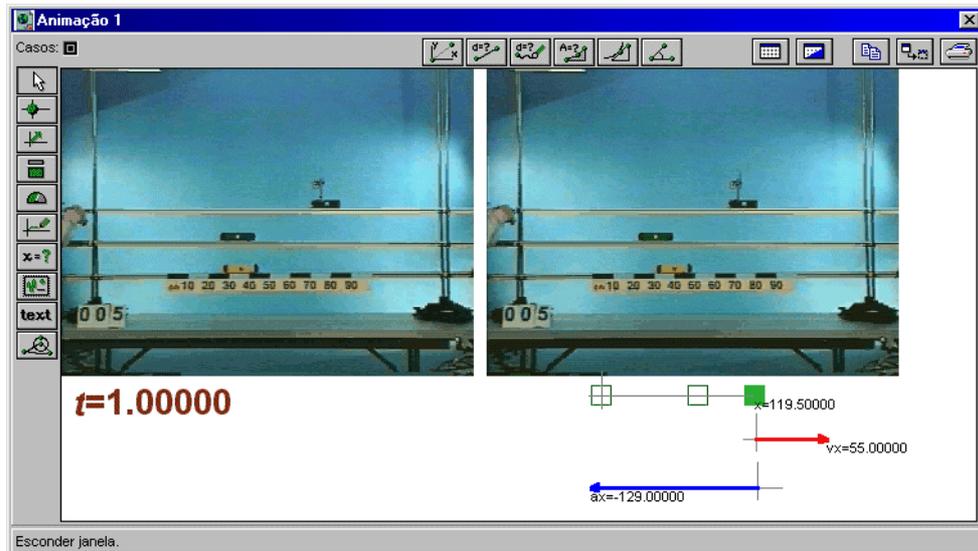


16. Uma vez executado o modelo, observa-se o que sucede à velocidade ao longo do movimento:

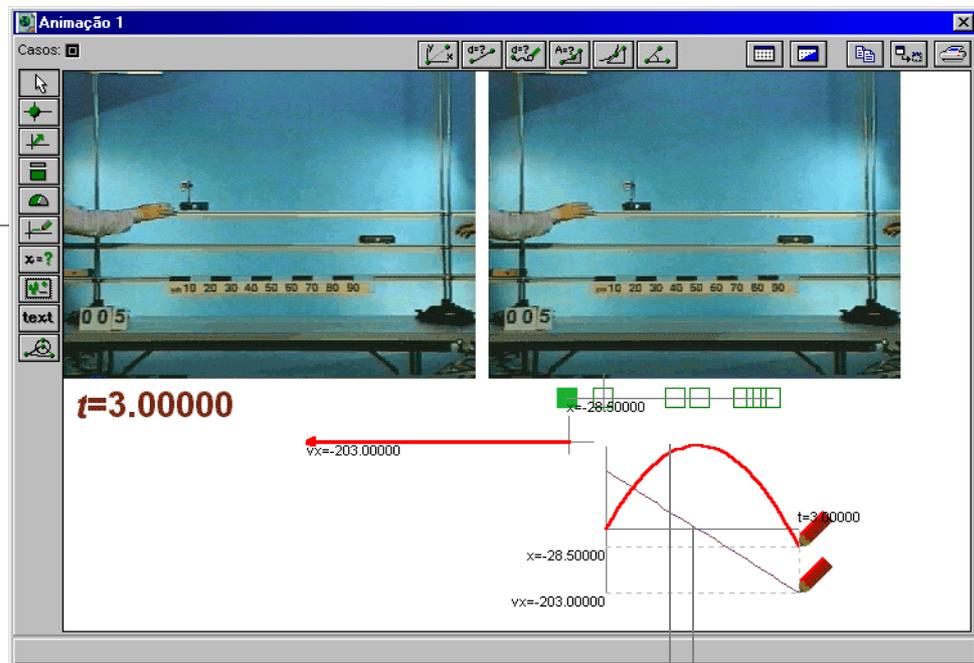


O vector representa a velocidade da partícula. A origem do vector acompanha a posição da partícula.

17. Pode proceder-se de modo semelhante para representar a aceleração. É necessário, no entanto, acrescentar na janela "Modelo" uma variável identificada como  $ax$  e com o valor adequado. Experimente, então, observar os dois vectores em simultâneo:



18. Representemos agora os gráficos da posição em função do tempo e da velocidade em função do tempo. Para criar um gráfico, utilização a ferramenta “Lápis” — lado esquerdo — e seleccionam-se as variáveis que se quer representar:



Lápis (para criar gráficos)

Características do gráfico da posição. Notem-se as escalas horizontal e vertical do gráfico. Assim, consegue-se um gráfico com um tamanho adequado.

Características do gráfico da velocidade. Notem-se as escalas horizontal e vertical do gráfico.

- 
19. No modelo que temos vindo a analisar está a utilizar-se o pixel como unidade de distância no ecrã. Se se quiser converter uma distância em metros é necessário determinar o factor de escala do vídeo. Isso pode ser feito facilmente como se explicou na secção anterior, “Ferramentas de medida”, para o caso das imagens.

# A5

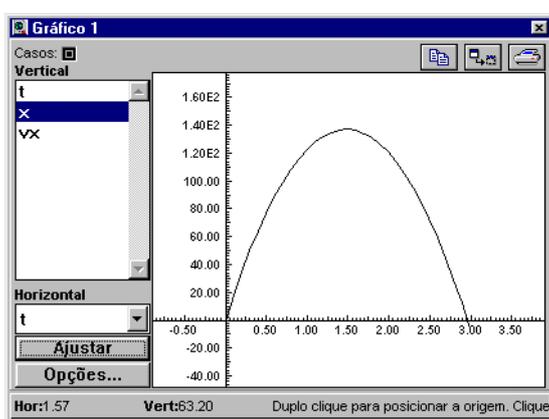
## Janela “Gráficos”

### Novas funcionalidades

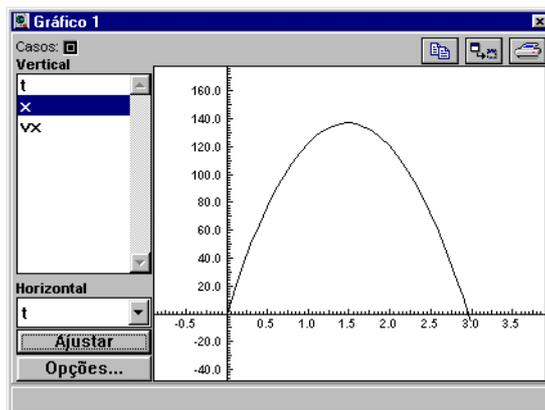
O fundo da janela “Gráficos” é, na versão 2.01, sempre branco. Deste modo, o contraste é aumentado.

As opções “Casas decimais” e “Limiar exponencial” — botão “Opções” da janela de “Controlo” permitem definir quantas casas decimais devem aparecer nas escalas da janela, bem como a partir de que valores se inicia o uso de notação exponencial.

Por exemplo, o gráfico seguinte,

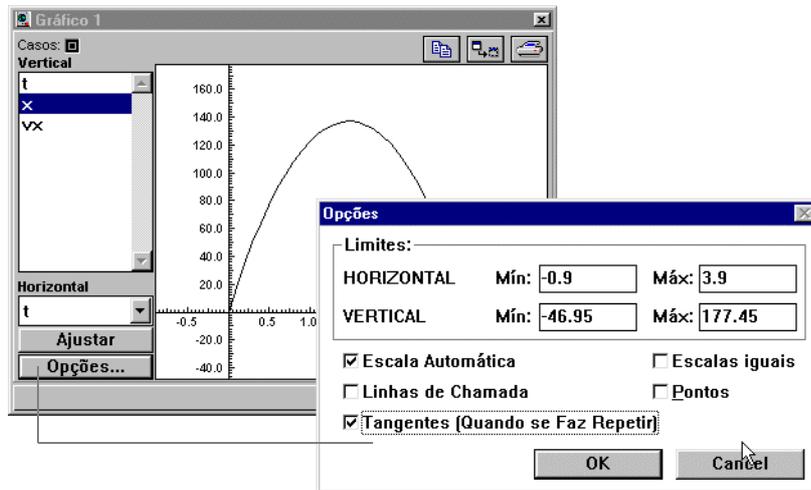


pode ser alterado para o seguinte, modificando o “Limiar exponencial” de 2 para 3 (ou superior) e o número de “Casas decimais” de 2 para 1:

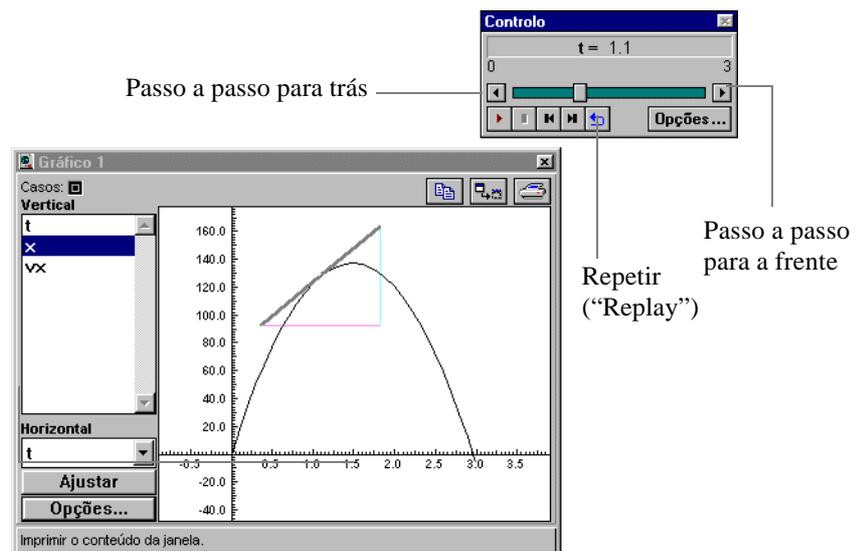


## Tangentes ao gráfico

Para se observar o declive da tangente ao gráfico em cada ponto é necessário seleccionar a opção “Tangentes (Quando se Faz Repetir)”, no botão “Opções” da janela de “Gráficos”:



A tangente só é visível quando se faz “Repetir” (“Replay”) ou se percorre o modelo passo a passo:

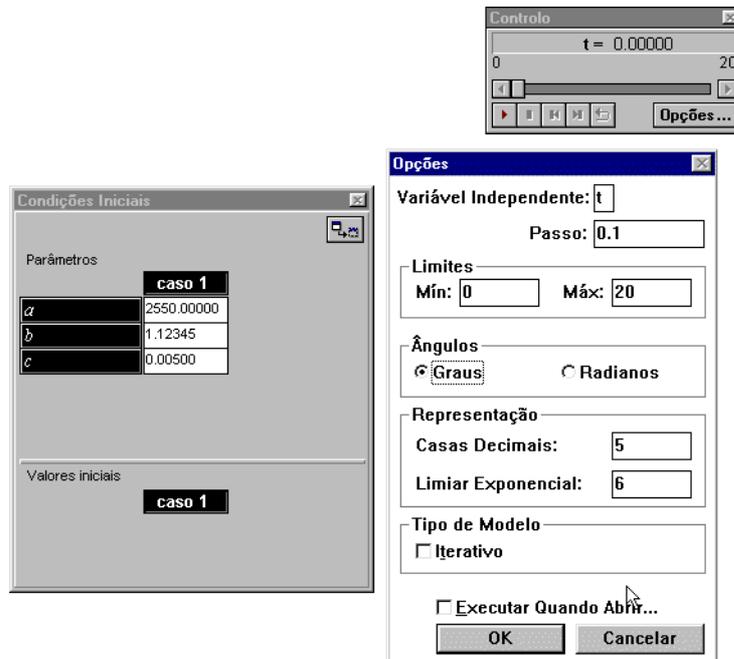


# A6

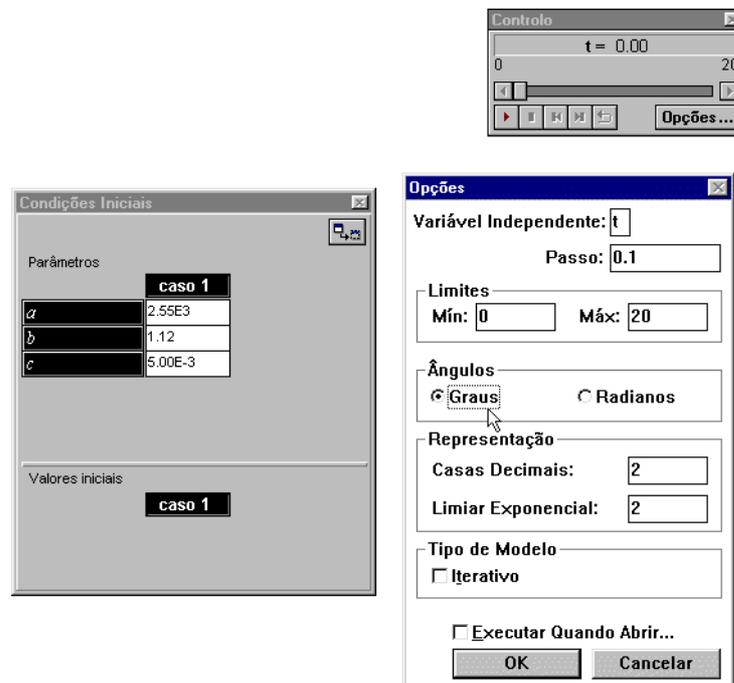
## Janela “Condições Iniciais”

O número de “Casas decimais” e o número de dígitos a partir do qual há “Notação exponencial”, definidos na janela “Controlo”, botão “Opções”, tem efeito sobre os valores da janela “Condições Iniciais”.

Assim, esta janela pode apresentar, por exemplo, o aspecto



ou



consoante as opções escolhidas.